Nörlund, N. E.
Mémoire sur les polynomes de Bernoulli. (French) JFM 47.0216.05
Acta Math. 43, 121-196 (1920).

Der Verf. verallgemeinert die Bernoullischen Polynorne $B_\nu(x)$ und die Eulerschen Polynome $E_\nu(x)$ in der folgenden Weise. Es seien $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ beliebige reelle oder komplexe Parameter. Man definiere zunächst die Ausdrücke $B_\nu^{(n)}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = B_n u^{(n)}$, die als Verallgemeinerungen der Bernoullischen Zahlen aufzufassen sind, durch eine Rekursionsformel, welche in leicht verständlicher Symbolik wie folgt lautet:

$$(B^{(n)} + \omega_n)^\nu - (B^{(n)})^\nu = \omega_n \nu B_{\nu-1}^{(n-1)}.$$

Ferner sei $B_\nu^{(1)} = B_n u$, $B_n u$ die ν-te Bernoullische Zahl, definiert, wie gewöhnlich, durch

$$(B+1)^\nu - B^\nu = \begin{cases} 0 \text{ für } \nu > 1, \\ 1 \text{ für } \nu = 1. \end{cases}$$

Dann setze man $B_\nu^{(1)}(x) = B_n u(x)$, $B_n u(x)$ das νte Bernoullische Polynom, während $B_\nu^{(n)} = B_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ diejenige eindeutig bestimmte Polynomlösung von

$$\Delta_{\omega_n} f(x) = \frac{f(x+\omega_n) - f(x)}{\omega_n} = \nu B_{\nu-1}^{(n-1)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1})$$

bezeichnet die sich für $x = 0$ auf $B_\nu^{(n)}$ reduziert. Die Wichtigkeit dieser Polynome, die in speziellen Fällen bereits von Appell und Barnes untersucht worden sind, zeigt sich bei der Aufgabe, die Differenzengleichung

$$\Delta^n_{\omega_1, \dots, \omega_n} f(x) = \Delta_{\omega_n}\left(\Delta^{n-1}_{\omega_1, \dots, \omega_{n-1}} f(x)\right) = \varphi^{(n)}(x)$$

zu lösen, wobei $\varphi(x)$ ein Polynom ν-ten Grades, $\varphi^{(n)}(x)$ seine n-te Ableitung bezeichnet. Es ergibt sich

$$f(x+y) = \sum_{s=0}^{\nu} \frac{B_s^{(n)}(x)}{s!} \varphi^{(s)}(y).$$

Die $B_\nu^{(n)}(x)$ sind symmetrisch in den Parametern $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$; es ist ferner $B_n u^{(n)} \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n - x) = (-1)^\nu B_\nu^{(n)}(x)$. Die $B_\nu^{(n)}$ stehen in direkter Beziehung zu B_ν durch die Formel

$$B_\nu^{(n)}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \sum \frac{\nu!}{s_1! s_2! \dots s_n!} \omega_1^{s_1} \omega_2^{s_2} \dots \omega_n^{s_n} B_{s_1} B_{s_2} \dots B_{s_n},$$

wo die Summation über sämtliche Wertsysteme $s_1, s_2, \dots, s_n$ mit $s_k \geqq 0, \sum_{s_k} = \nu, k = 1, 2, \dots, n$, zu erstrecken ist. Es ist ferner

$$B_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} x^s B_{\nu-s}^{(n)}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n).$$

Von den zahlreichen Beziehungen, die zwischen den Polynomen $B_\nu^{(n)}(x)$ bestehen, seien folgende erwähnt:

$$\sum_{s=0}^{m-1} B_\nu^{(n)}\left(x + \frac{s\omega_1}{m} \mid \omega_1, \dots, \omega_n\right) = m B_\nu^{(n)}\left(x \mid \frac{\omega_1}{m}, \omega_2, \dots, \omega_n\right),$$

sowie eine allgemeinere, die hieraus durch wiederholte Anwendung folgt. Weiter

$$\int_0^{m_1} dt_1 \int_0^{m_2} dt_2 \cdots \int_0^{m_n} B_\nu^{(n)}(x + x\omega_1 t_1 + \cdots + \omega_n t_n) dt_n$$
$$= \sum_{s_1=0}^{m_1-1} \cdots \sum_{s_n=0}^{m_n-1} (x + s_1\omega_1 + s_2\omega_2 + \cdots + s_n\omega_n)^\nu,$$

$m_1, m_2, \ldots, m_n$ beliebig positiv ganz.

Die Eulerschen Polynome $E_\nu^{(n)}(x) = E_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ sind zur Behandlung der Differentialgleichung

$$\nabla^n_{\omega_1,\ldots,\omega_n} f(x) = \nabla_{\omega_n}\left(\nabla^{n-1}_{omega_1,\ldots,\omega_{n-1}} f(x)\right) = \varphi(x),\ \nabla_\omega f(x) = \frac{f(x+\omega)+f(x)}{2}$$

gebildet worden. $E_\nu^{(n)}(x)$ ist diejenige Polynomlösung, welche sich hieraus für $\varphi(x) = x^\nu$ ergibt. Dann ist allgemein, wenn $\varphi(x)$ ein beliebiges Polynom ν-ten Grades ist,

$$f(x+y) = \sum_{s=0}^{\nu} \varphi^{(s)}(x) \frac{E_s^{(n)}(y)}{s!}.$$

Außerdem werden die Eulerschen Zahlen E_ν verallgemeinert, durch Einführung der ganzen rationalen Funktionen $E_\nu^{(n)}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, definiert durch

$$(E^{(n)} + \omega_n)^\nu + (E^{(n)} - \omega_n)^\nu = 2E_\nu^{(n-1)}, E_\nu^{(1)} = E_\nu,$$

wo für die $E_n u$

$$(E+1)^\nu + (E-1)^\nu = \begin{cases} 0 \text{ für } \nu > 0, \\ 2 \text{ für } \nu = 0 \end{cases}$$

gilt. Es ergibt sich dann

$$E_\nu^{(n)}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \sum_{s_k \geqq \sum_{k=1,2,\ldots,n} s_k = \nu} \frac{\nu!}{s_1! s_2! \ldots s_n!} E_{s_1} E_{s_2} \ldots E_{s_n} \omega_1^{s_1} \omega_2^{s_2} \ldots \omega_n^{s_n},$$

ferner

$$E_\nu^{(n)}(x) = \sum_{s=0}^{\nu} \binom{\nu}{s} \frac{E_s^{(n)}}{2^s} \left(x - \frac{\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n}{2}\right)^{\nu - s}.$$

Außerdem bestehen Beziehungen zwischen $B_\nu^{(n)}(x)$ und $E_\nu^{(n)}(x)$. Weiterhin werden Polynome mit negativen Indizes n eingeführt, wobei die meisten Formeln ihre Gültigkeit behalten. Es sei noch erwähnt, daß die erzeugenden Funktionen dieser Polynome folgendermaßen lauten:

$$\frac{\omega_1\omega_2 \ldots \omega_n t^n e^{xt}}{(e^{\omega_1 t} - 1)(e^{\omega_2 t} - 1) \ldots (e^{\omega_n t} - 1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} B_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n),$$
$$\frac{2^n e^{xt}}{(e^{\omega_1 t} + 1)(e^{\omega_2 t} + 1) \ldots (e^{\omega_n t} + 1)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} E_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n),$$

Der letzte Abschnitt behandelt den Spezialfall, wo alle Parameter ω_i gleich 1 sind. Es ist dann z. B.

$$B_n^{(n+1)}(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-n).$$

In den zwei ersten Abschnitten leitet der Verf. die bekannten Eigenschaften der gewöhnlichen Bernoullischen und Eulerschen Polynome ab, in einer Weise, die den bisherigen Darstellungen in vieler Beziehung überlegen ist. (II 3.)

Reviewer: Szegö, Prof. (Berlin)

Full Text: DOI

References:

[1] A treatise on differential equations, London 1865, p. 107. · Zbl 064.1667cj

[2] On peut donc, si l'on aime mieux,définir les polynomes d'Euler par cesn équations au lieu de, comme nous l'avons fait, par l'unique équation (1).

[3] Si nous n'avions pas eu ce but supplémentaire nous aurions pu simplifier un peu l'analyse de ce paragraphe en tenant compte des résultats du paragraphe précédent.

[4] Sip=o cette équation se réduit à l'équation (10).

[5] On peut aussi aisément déduire ces formules de l'équation aux différences finies à laquelle satisfaitB {\(\gamma\)} (n) (x).

[6] Sur les fonctions deBernoulli à deux variables, Archiv Math. Phys. (3) 4 (1902–03), p. 292–3.

[7] Über dieBernoulli'schen Zahlen und Funktionen im Gebiete der Funktionen zweier veränderlicher Grössen, Ber. Ges. Lpz, 55 (1903), math. p. 39–62.

[8] The Theory of the double Gamma Funktion, Philos. Trans. London 196 A (1901), p. 271–85; On the Theory of the multiple Gamma Function, Trans. Cambr. philos. Soc. 19 (1904) p. 377–86.

[9] OEuvres (2) 8, Paris 1890, p. 180–94.

[10] Sur les développements en séries, Bull. Soc. math. France 6 (1878), p. 57–68.

[11] Mém. Acad. Pétersbourg (7) 31 (1883), mém. no 11.

[12] Educ. Times 39 (1883), p. 74.

[13] Bull. Soc. physico-mathématique de Kasan (1) 8 (1890), p. 291–336, id. , p. 234.

[14] Nombres deBernoulli des ordres supérieurs,id.Bull. Soc. physico-mathématique de Kasan (2) 7 (1898), p. 146–202.

[15] Ann. mat. pura appl. (3) 10 (1904), p. 287–325; Handbuch der Theorie der Gammafunktion, Leipzig 1906, p. 66–78.

[16] On peut aussi déduire ces équations de la formule deTaylor.

[17] De cette équation on déduit, en posantx=0, que \(B_v^{(n + 1)} (I) = \frac{{n - v}}{n}B_v^{(n)}\) .

[18] L'expression (6) se réduit à l'expression ({\(\zeta\)}) si {\(\nu\)}.

[19] On conclut de cette relation que \((- I)^s \left({\begin{array}{*{20}c} v s \end{array} } \right)B_s^{(v + 1)}\) est un entier positif, sis. L'importance de ces nombres a été reconnue pour la première fois parStirling.