Goursat, E.
Sur le problème de Bäcklund et les systèmes de deux équations de Pfaff. (French)
JFM 47.0437.02
Toulouse Ann. (3) 10, 65-173 (1920).

Die Theorie der Bäcklundschen Transformationen hängt aufs engste zusammen mit der der Systeme von zwei Pfaffschen Gleichungen in 6 Veränderlichen (vgl. F. d. M. 46, 723 (JFM 46.0723.*), 1916- 18). Der Verf. entwickelt daher zunächst (S. 66-97) die Theorie dieser Systeme, die im wesentlichen allerdings schon von Duport gegeben ist (F. d. M. 28, 301 (JFM 28.0301.*), 1897), aber er macht das viel einfacher, weil er sich auf die Untersuchungen von Cartan stützen kann (F. d. M. 32, 351 (JFM 32.0351.*), 1901). Es ergibt sich, daß ein solches System im allgemeinen und zwar auf zwei verschiedene Weisen die reduzierte Form;

$$(1) \quad dz - pdx - qdy = 0, \; dq - udp - adx - bdy = 0$$

erhalten kann, wo a, b Funktionen von x, y, z, p, q, u sind, wo der Ausdruck: $a_u + b - ub_u$ nicht verschwindet und wo jedes der beiden Systeme von vier Pfaffschen Gleichungen, denen die singulären Elemente (im Sinne Cartans) des ursprünglichen Systems genügen, höchstens zwei integrable Kombinationen besitzt. Unter den besonderen Fällen, die eintreten können, ohne daß die Zahl der Veränderlichen des Systems unter sechs herabgedrückt werden kann (S. 90 f.), erwähne ich nur den, wo das System nur auf eine Art die reduzierte Form (1) erhalten kann. Der Ausdruck $ub_u - b - a_u$ ist dann null, aber ein gewisser anderer Ausdruck verschwindet nicht. Ebensowenig will ich alle die reduzierten Formen aufzählen, die sich ergeben, wenn die Zahl der Veränderlichen des Systems auf 5 oder auf noch weniger gebracht werden kann (S. 91-97). In allen besonderen Fällen kann die Integration des Pfaffschen Systems vollständig geleistet werden (S. 97-99): im Falle der reduzierten Form (1) aber kommt sie hinaus auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

von besonderer Form, die eine Schar von Charakteristiken erster Ordnung hat, der Gleichung nämlich, die aus:

$$r - us - a = 0, \; s - ut - b = 0$$

durch Elimination von u entsteht. Man nennt dann $F = 0$ eine Resolvente erster Art des Pfaffschen Systems, und zwar ist umgekehrt eine Gleichung $F = 0$ immer dann eine solche Resolvente, wenn sie, r, s, t als Punktkoordinaten des R_3 aufgefaßt, eine Linienfläche darstellt, deren Erzeugende denen des Kegels $rt - s^2 = 0$ parallel sind (S. 99-102). Im allgemeinen Falle gehören daher zu dem Pfaffschen Systeme zwei solche Resolventen erster Art. Kann das System nur auf eine Weise die reduzierte Form (1) erhalten, so besitzt es nur eine Resolvente erster Art und diese hat ein intermediäres Integral, das von einer willkürlichen Funktion abhängt. Besonders bemerkenswert ist der Fall, daß die Resolvente eine Monge- Ampèresche Gleichung ist; eine solche ist nämlich im allgemeinen Resolvente für zwei wesentlich verschiedene Pfaffsche Systeme (S. 102-105). Es kann auch vorkommen, daß das System auf unendlich viele Weisen die reduzierte Form (1) erhalten kann, daß es also unendlich viele Resolventen erster Art besitzt: die Linienfläche $F = 0$ ist dann abwickelbar (S. 105 f.).

Als Bäcklundsches Problem bezeichnet der Verf. die Aufgabe, in den Räumen x, y, z und X, Y, Z zwei Vereine von je ∞^2 Elementen, deren Elemente einander zugeordnet sind, so zu bestimmen, daß zwei einander zugeordnete Elemente immer vier gegebene Gleichungen:

$$F_i(x, y, z, p, q, X, Y, Z, P, Q) = 0 \; (i = 1, \ldots, 4)$$

befriedigen, aus denen wieder x, y, z, p, q nach X, Y, Z, P, Q eliminiert werden können. Ersetzt man die Gleichungen $F_i = 0$ durch fünf Gleichungen von der Form:

$$(2) \quad X = f_1(x, y, z, p, q, u), \; Y = f_2, \ldots, \; Q = f_5,$$

so liefern die beiden Bedingungen der vereinigten Lage : $dz - pdx - qdy = 0, dZ - PdX - QdY = 0$ ein

System von zwei Pfaffschen Gleichungen

$$(3)\quad dz - pdx - qdy = 0,\ hdu + adp + \cdots + edy = 0$$

und das Bäcklundsche Problem kommt hinaus auf die Bestimmung der zweifach ausgedehnten Integralmannigfaltigkeiten von (3). Umgekehrt gehören zu jedem solchen Pfaffschen Systeme unendlich viele Bäcklundsche Probleme. Zwei solche Probleme gehören zu derselben *Klasse*, wenn die zugehörigen Pfaffschen Systeme ineinander überführbar sind (S. 110-113). Auf S. 113-117 gibt der Verf. neun Beispiele von Bäcklundschen Problemen und den zugehörigen Pfaffschen Systemen.

Hat man im R_6 ein Pfaffsches System, das auf zwei Weisen die Form (1) erhalten kann, so entsprechen die Integrale der beiden zugehörigen Resolventen erster Art einander eineindeutig, und man kommt von der einen dieser beiden Resolventen zur anderen durch eine Bäcklundsche Transformation, die nach Clairin (F. d. M. 33, 362 (JFM 33.0362.*), 1902) mit B_1 bezeichnet wird. Hat man umgekehrt eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei verschiedenen Systemen von Charakteristiken, unter denen nur das eure von erster Ordnung ist, und gibt es kein intermediäres Integral mit einer willkürlichen Funktion, so kann diese Gleichung immer als die eine Resolvente erster Art eines Pfaffschen Systems aufgefaßt werden, und man kann eine Transformation B_1 aufstellen, die die Gleichung in die zweite Resolvente überführt und die bis auf eine Berührungstransformation bestimmt ist. Zu einer Monge-Ampèreschen Gleichung mit zwei verschiedenen Systemen von Charakteristiken gehören im allgemeinen zwei verschiedene Transformationen B_1 (S. 117-120).

Ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Unbekannten z, Z:

$$F_k(x, y, z, Z, p, q, P, Q) = 0\ (k = 1, 2)$$

liefert bei Hinzunahme von $X = x, Y = y$ ein Bäcklundsches Problem und kann daher im allgemeinen auf zwei Arten auf eine partielle Gleichung zweiter Ordnung zurückgeführt werden (S. 120 f.).

Auf S. 121-126 folgen fünf Beispiele für die allgemeinen Entwicklungen von S. 117-120.

Ein Pfaffsches System der hier betrachteten Art kann auch die Form:

$$(4)\quad dz - pdx - qdy = 0,\ du - Xdx - Ydy - Pdp - Qdq = 0$$

erhalten, wo X, Y, P, Q Funktionen von x, y, z, p, q, u sind. Sollen z, p, q, u solche Funktionen von x, y sein, daß (4) erfüllt ist, so muß werden:

$$(5)\quad u_x = X + Pr + Qs,\ u_y = Y + Ps + Qt.$$

Bildet man die Integrabilltätsbedingung von (5) und eliminiert man u, so erhält man ein System von zwei Gleichungen dritter Ordnung. Aber diese Integrabilitätsbedingung kann von u frei sein und ist dann eine Monge-Ampèresche Gleichung für z. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn das Pfaffsche System nicht auf eins in weniger als sechs Veränderlichen zurückführbar ist, und man nennt dann die Monge-Ampèresche Gleichung eine Resolvente zweiter Ordnung *zweiter* Art des Systems. Von jeder Resolvente erster Art kann man dann zu einer solchen Resolvente zweiter Art durch eine Bäcklundsche Transformation B_2 (nach Clairin) gelangen (S. 126-129). Hat endlich das System zwei wesentlich verschiedene Resolventen zweiter Art, so gehen sie durch eine Bäcklundsche Transformation B_3 (nach Clairin) ineinander über (S. 129f.).

Können umgekehrt zwei partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung durch eine Trransformation B_1, B_2 oder B_3 ineinander übergeführt werden, so ist jede von ihnen, je nachdem, für ein gewisses Pfaffsches System, Resolvente erster oder zweiter Art. Insbesondere kann eine Transformation B_3 zwischen zwei Monge-Ampèreschen Gleichungen im allgemeinen durch zwei Transformationen B_2 ersetzt werden (S. 130 f.).

Auf S. 131-133 findet man ein Beispiel eines Pfaffschen Systems mit zwei Resolventen erster Art und einer Resolvente zweiter Art.

Auf S.133-135 wird eine notwendige Bedingung dafür entwickelt, daß ein Pfaffsches System eine Resolvente zweiter Art besitzt. Diese ist die Veranlassung, daß auf S. 137 die Bedingungen dafür entwickelt werden, damit ein System von drei Pfaffschen Gleichungen des R_c auf fünf Veränderliche zurückgeführt werden kann. Gestattet ein System von zwei Pfaffschen Gleichungen eine infinitesimale Transformation, so hat es immer eine Resolvente zweiter Art (S. 138). Auf S. 138-144 werden dann noch verschiedene Fälle betrachtet, die die Integrabilitätsbedingung von (5) darbieten kann. Gibt es eine Resolvente zweiter Art und enthält diese Integrabilitätsbedingung keine andere Ableitung zweiter Ordnung als s, so kann das Pfaffsche System die Form

$$(6)\quad dz = pdx + qdy,\ du = f(x, y, z, p, u)dx + \varphi(x, y, z, q, u)dy$$

erhalten. Diese Systeme werden dann auf S. 145-151 noch etwas näher untersucht. Der Verf. behält sich vor, später diese Untersuchungen fortzusetzen.

Jedes System $\sum$ von vier Pfaffschen Gleichungen des R_6 stellt für unendlich viele Systeme S von zwei Pfaffschen Gleichungen die eine Schar von singulären Elementen dar. Auf S. 151-165 behandelt der Verf. die Aufgabe, bei gegebenem $\sum$ alle diese Systeme S zu bestimmen, und führt sie auf eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit sechs unabhängigen Veränderlichen zurück.

Auf S. 165-173 wird endlich die Theorie der Systeme von zwei Pfaffschen Gleichungen in n Veränderlichen skizziert. Dabei stellt sich heraus, daß der Fall eines geraden n von dem eines ungeraden n wesentlich verschieden ist.

Reviewer: Engel, Prof. (Gießen)

Full Text: DOI Numdam EuDML