Courant, R.

Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik. (German)

JFM 47.0455.02
Math. Zeitschr. 7, 1-57 (1920).

Sei $L(u)$ der sich selbst adjungierte elliptische Differentialausdruck:

$$L(u) = p\Delta u + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + qu \ (p > 0),$$

und sei G ein (geeignet begrenztes) Gebiet der Ebene (die Untersuchungen gelten übrigens fast durchweg bei beliebiger Dimensionszahl). Es handelt sich die Eigenwerte der Differentialgleichung:

$$L(u) + \lambda k u = 0 \ (k > 0),$$

wenn am Rande R von G eine der drei Randbedingungen vorgeschrieben ist:

$$1. \quad u = 0; \qquad 2. \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0; \qquad 3. \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u.$$

Setzt man:

$$D(\varphi) = \iint_G \left\{ p\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] + q\varphi^2 \right\} dxdy,$$
$$\mathfrak{D}(\varphi) = D(\varphi) + \int_R p\sigma\varphi^2 ds,$$

so kann der n-te Eigenwert λ_n so definiert werden: Es seien $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ in G stückweise stetige Funktionen, es sei ferner $d(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ die untere Grenze von $D(\varphi)$ (bzw. von $\mathfrak{D}(\varphi)$ im Falle der 3. Randbedingung) für alle in G stetigen und stückweise stetig differentiierbaren φ, welche den Bedingungen:

$$\iint_G k\varphi v_i dxdy = 0 \ (i = 1, 2, \dots, n-1); \ \iint_G k\varphi^2 dxdy = 1$$

und der betrachteten Randbedingung genügen. Dann ist λ_n gleich dem Maximum von $d(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ für alle $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$. Im Falle der Randbedingungen 2. und 3. kann dabei die Beschränkung auf solche φ, die der betrachteten Randbedingung genügen, auch fallen gelassen werden.

Diese Definition des n-ten Eigenwertes, zusammen mit der Bemerkung, daß die untere Grenze $d(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$, und somit auch ihr Maximum λ_n nicht abnehmen kann, wenn die Klasse der zur Konkurrenz zugelassenen φ verengert wird, und nicht zunehmen kann, wenn diese Klasse erweitert wird, führt fast ohne Rechnung zu folgenden Sätzen über die Eigenwerte:

Sind $G^{(i)}$ endlich viele Teilgebiete von G ohne gemeinsame innere Punkte, so ist die Anzahl der unter λ liegenden Eigenwerte der Randbedingung 1. für G mindestens so groß wie die Gesamtzahl der unter λ liegenden Eigenwerte der $G^{(i)}$. Daraus folgt insbesondere die Monotonieeigenschaft: Der zur Randbedingung 1. gehörige n-te Eigenwert von G ist nie größer als der n-te Eigenwert eines Teilgebietes.

Füllen die $G^{(i)}$ das Gebiet G lückenlos aus, so ist die Anzahl der unter λ liegenden Eigenwerte der Randwertaufgabe 2. für G höchstens so groß wie die Gesamtzahl der unter λ liegenden Eigenwerte der $G^{(i)}$.

Sind λ_n, k_n, μ_n der n-te Eigenwert für G bei der 1., 2., 3. Randbedingung, so ist $\mu_n \leqq \lambda_n$, und falls $\sigma \geqq 0$, auch $k_n \leqq \mu_n$. – Mit wachsendem σ wächst auch μ_n. Der n-te Eigenwert ändert sich stetig mit p, q, k und σ. Der n-te Eigenwert ändert sich auch stetig, wenn das Gebiet G in stetiger Weise so abgeändert wird, daß auch die Normalen des Randes sich stetig ändern (dieser, die Normalen betreffende Zusatz kann wegbleiben, wenn es sich um die Eigenwerte der 1. Randwertaufgabe handelt).

Da für Quadrate das asymptotische Verhalten der Eigenwerte bekannt ist, kann es nun für beliebige

Gebiete ermittelt werden, indem man sie durch Quadrate approximiert. Es ergibt sich für die Anzahl $A(\lambda)$ der unter λ liegenden Eigenwerte der zuerst auf anderem Wege von H. Weyl abgeleitete Ausdruck (F. d. M. 43, 436 (JFM 43.0436.*), 1912):

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda \iint_G \frac{k}{p} dx dy} = \frac{1}{4\pi}.$$

Im Falle der Gleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ ist also $A(\lambda)$ asymptotisch gleich $\frac{f}{4\pi}\lambda$, wo f den Flächeninhalt von G bedeutet. Für den dabei begangenen Fehler ergibt sich die Abschätzung:

$$|A(\lambda) - \frac{f}{4\pi}\lambda| < C\sqrt{\lambda} \cdot \log \lambda,$$

wo C eine Konstante bedeutet.

Auch die asymptotische Eigenwertverteilung bei analogen räumlichen Problemen wird angegeben und daraus die asymptotische Eigenwertverteilung der elektrischen Eigenschwingungen eines Hohlraumes hergeleitet. (IV 15)

Reviewer: Hahn, Prof. (Wien)

Full Text: DOI EuDML