Hausdorff, F.

Dimension und äußeres Maß. (German) JFM 46.0292.01

Math. Ann. 79, 157-179 (1918).

Der Verf. gibt weitgehende Verallgemeinerungen des von *Carathéodory* (Gött. Nachr. 1914, 404; F. d. M. 45, 443 (JFM 45.0443.*), 1914-15) eingeführten m-dimensionalen Maßes im n- dimensionalen Raum. Die auszumessende Menge E wird mit endlich, oder abzählbar vielen Mengen U eines geeigneten Systems $\mathfrak{U}$ mit endlich, oder abzählbar vielen Mengen U eines geeigneten Systems $\mathfrak{U}$ überdeckt und dann der gleiche Grenzübergang wie bei *Carathéodory* ausgeführt, die Ausmessung wird aber dann nicht mit Hilfe der Duchmesser der U, sondern mit einer beliebigen, endlichen, nicht-negativen Mengefunktion $l(U)$ vorgenommen. Die so erhaltene Maßzahl ist stets ein äußeres *Carathéodory*sche Maß und, wenn die U *Borel*sche Mengen sind, oder wenn $l(U)$ eine stetige Mengenfunktion ist, sogar ein reguläres äußeres Maß. Einfache spezielle Beispiele verdeutlichen die Brauchbarkeit und Vielseitigkeit des Verfahrens. Insbesondere ergibt sich ein einfaches m-dimensionales äußeres Maß, wenn für die U n-dimensionale Kugeln K_ν vom Durchmesser d_ν genommen werden und $l(K_\nu) = c_m(d_\nu)^m$ gesetzt wird, wobei c_m das Volumen der m dimensionalen Kugel vom Durchmesser 1 ist. Dieser Ansatz wird nun auch für nicht-ganzzahlige m benutzt und noch für verfeinerte (z. B. logarithmische) Skalen verallgemeinert, wobei $l(K_\nu) = \lambda(d_\nu)$ gesetzt wird und $\lambda(x)$ eine positive, stetig mit x wachsende und zugleich mit x gegen 0 konvergierende Funktion bezeichnet (natürlich kommt es hier nur auf das Verhalten von $\lambda(x)$ in der Nähe von $x = 0$ an).

Dies führt zugleich zu einer Verallgemeinerung des Dimensionsbegriffs. Ist das mit Hilfe von $\lambda(x)$ definierte äußere Maß von E endlich und $\neq 0$, so heiße E von der "Dimension" $[\lambda(x)]$, wobei die Dimension $[x^m]$ auch mit (m) bezeichnet wird. Die Dimensionen $[\lambda(x)]$ und $[\mu(x)]$ werden "gleich" genannt, wenn die zugehörigen äußeren Maße für jede Menge E gleichzeitig Null oder positiv oder unendlich sind; entsprechend wird "höher" und "niedriger" definiert. Weiterhin wird der hier sehr wesentliche Nachweis erbracht, daß wirklich Mengen solcher nicht- ganzzahligen "Dimensionen" existieren, und zwar gelingt dies für jedes (m) und sehr allgemeine $[\sigma(x)]$ schon allein durch punkthafte, perfekte Mengen. Daraus folgt z. B., daß es in der Ebene (nicht-quadrierbare) *Jordan*sche Kurven von jeder beliebigen zwischen 1 und 2 gelegenen "Dimension" gibt. – Es sei noch gestattet darauf hinzuweisen, daß wegen der Möglichkeit, die punkthaften, perfekten Mengen umkehrbar eindeutig und beiderseits stetig aufeinander abzubilden, die *Hausdorff*schen "Dimensionen" 1. mit den "Dimensionstypen" von *Fréchet* (C. R. 148, 1152; Math. Ann. 68, 145; F. d. M. 40, 99 (JFM 40.0099.*), 1909; 41, 102, 1910) gar nichts gemeinsam haben und 2. (im Gegensatz zu diesen) keineswegs Invarianten der Analysissitus darstellen, was allerdings von vornherein nicht anders zu erwarten war, da ja der Maßbegriff keine Invariante der Analysis situs ist.

Reviewer: Rosenthal, Prof. (Heidelberg)

Full Text: DOI EuDML

References:

[1] C. Carathéodory, Über das lineare Maß von Punktmengen?eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs, Gött. Nachr. 1914, S. 404-426. Hierauf beziehen sich unsere Zitate. Die etwas modifizierte Darstellung in den Vorlesungen über reelle Funktionen (Teubner 1918) enthält gerade den Teil der Theorie nicht, an den sich unsere Arbeit anschließt, und konnte daher außer Betracht bleiben.

[2] M. Fréchet, Les dimensions d'un ensemble abstrait, Math. Ann. 68 (1910), S. 145-168. · Zbl 41.0102.03 · doi:10.1007/BF01474158

[3] W. Blaschke, Über affine Geometrie III. Eine Minimumeigenschaft der Ellipse (Leipz. Berichte 69 (1917), S. 12). · Zbl 46.1112.02

[4] H. Jung, Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschließt, Diss. Marburg 1899 = Journal f. Math. 123 (1901), S. 241-257. · Zbl 32.0296.05

[5] f(X)=L(AX) ist für die bezüglichL meßbaren MengenX eine abselut additive Mengenfunktion, ?(x) die zugeordnete Punktfunktion Vgl. die Schrift von J. Radon, Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen (Wiener Akad.

Ber. 122 (1913), S. 1295-1438), die für die Behandlung Carathéodoryscher Maße noch mancherlei Stoff bietet. Statt der Abbildungx *=?(x) (vgl. dazu Radon, S. 1343) könnte man auch die eineindeutige Abbildungx *=x+?(x) heranziehen, auf die mich Herr Carathéodory brieflich aufmerksam machte.

[6] Vgl. z. B. meine Grundzüge der Mengenlehre (Leipzig 1914), S. 374.