Cerf, G.
Sur les transformations des équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque à deux variables indépendantes. (French) JFM 46.0716.04
Journ. de Math. (8) 1, 309-412 (1918).

Eine sehr inhaltreiche Arbeit, die aber wegen der überaus großen Allgemeinheit, die der Verf. überall anstrebt, nicht gerade leicht lesbar ist. Nach einer Einleitung, in der er den Inhalt der Arbeit andeutet, betrachtet der Verf. in Kap. 1 (S. 315-356) zunächst ein System von zwei Gleichungen erster Ordnung

$$(1)\quad F(x,y,z,p,q)=0,\ G(x,y,z,p,q)=0$$

wobei der Ausdruck $\delta=F_pG_p-F_qG_q$ nicht verschwindet, und zeigt, daß es unter Umständen eine singuläre Lösung besitzt, die $\delta=0$ macht. Man erkennt leicht, daß diese etwaige singuläre Lösung erhalten wird, wenn man zu (1) die Gleichungen hinzufügt, die durch Nullsetzen der zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\begin{vmatrix} F_x & +pF_zF_y & +qF_zF_pF_q \\ G_x & +pG_zG_y & +qG_zG_pG_q \end{vmatrix}$$

hervorgehen. Dabei brauchen die Gleichungen (1) nicht ∞^1 gemeinsame Lösungen zu besitzen, der *Poisson*sche Klammerausdruck $[FG]$ braucht also nicht vermöge (1) zu verschwinden. Nunmehr behandelt der Verf. ein System von zwei Gleichungen m-ter und M-ter Ordnung ($m\leqq M$) mit einer unbekannten Funktion z und zwei unabhängigen Veränderlichen x,y:

$$(2)\quad f(x,y,z,p_{1,0},p_{0,1},\dots,p_{0,m}=0,\ F(x,y,z,p_{1,0},\dots,p_{0,M}=0.$$

Indem er $f=0$ $(M-1)$-mal und $F=0$ $(m-1)$-mal differentiiert und die gewonnenen Gleichungen zu (2) hinzufügt, erhält er ein System (A), das die Ableitungen $(m+M-1)$-ter Ordnung von z bestimmt, sobald eine gewisse Determinante D nicht verschwindet, und zwar ist D die Resultante der algebraischen Gleichungen

$$(3)\quad \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{\partial f}{\partial p_{m-k,k}}dy^{m-k}dx^k=0,\sum_{j=0}^{M}(-1)^j\frac{\partial F}{\partial p_{m-j,j}}dy^{M-j}dx^j=0,$$

die die charakteristischen Richtungen von $f=0$ und $F=0$ bestimmen. Verschwindet D entweder identisch oder vermöge (A) und sind die Gleichungen $(m+M-1)$-ter Ordnung von (A) nach gerade $m+M-r$ von den Ableitungen $(m+M-1)$-ter Ordnung auflösbar, so ist $r\leqq m$ und die in (A) enthaltenen $m+M+2-2r$ Gleichungen $(m+M-r)$-ter Ordnung sind nach gerade $m+M+1-2r$ von den $m+M-r+1$ Ableitungen dieser Ordnung auflösbar. Die beiden Gleichungen (2) haben dann gerade r charakteristische Richtungen gemein.

Differentiiert man (A) noch einmal, und bildet man den Ausdruck (für den Fall beliebig vieler unabhängiger Veränderlicher hat *I. E. Campbell* den entsprechenden Ausdruck schon 1900 eingeführt; Lond. M. S. Proc. 31, 235)

$$[fF]=\sum_{i=0}^{m}\frac{\partial f}{\partial p_{m-i,i}}\frac{d^mF}{dx^{m-i}dy^i}-\sum_{k=0}^{M}\frac{\partial F}{\partial p_{M-k,k}}\frac{d^mj}{dx^{m-k}dy^k}.$$

so fallen alle Ableitungen $(m+M)$-ter Ordnung heraus. Ist dann $D\neq 0$ auch bei Berücksichtigung von (A), so ist das Verschwinden von $[fF]$ vermöge (A) notwendig und hinreichend, damit (A) vollständig integrabel sei, und die allgemeinste Lösung von (A) enthält $m\cdot M$ willkürliche Konstanten. Verschwindet dagegen D identisch oder vermöge (A), haben also die Gleichungon (2) charakteristische Richtungen gemein, so ist $[fF]=0$ im allgemeinen eine neue Gleichung, die zu (A) hinzugefügt werden muß.

Um die verschiedenen Möglichkeiten leichter zu übersehen, betrachtet der Verf. statt des Systems (A) ein System von partiellen Differentialgleichungen k-ter Ordnung zwischen x,y,z, das p Gleichungen k-ter

Ordnung

$$(s_k) \quad a_1 = 0, \ldots, a_p = 0$$

und N Gleichungen niedrigerer Ordnung enthält. Den Inbegriff aber Gleichungen ρ-ter und niedrigerer Ordnung des Systems ($\rho \leqq k$) bezeichnet er mit S_ρ. Insbesondere sagt er, das System habe reguläre Form, wenn die Gleichungen ρ-ter Ordnung des Systems immer nach ebensovielen Ableitungen ρ- ter Ordnung auflösbar sind, wie ihre Zahl beträgt. Für irgendeine der möglichen Auflösungen des Systems denkt er sich die Integrabilitätsbedingungen gebildet und fügt diese, wenn sie nicht schon eine Folge des Systems sind, als neue Gleichungen zu dem System hinzu. Dabei treten im allgemeinen gewisse Ausdrücke auf, die nicht verschwinden dürfen, und die nur für singuläre Integralflächen null werden können. Die etwaigen singulären Integralflächen werden dann durch ein neues System definiert, das auch die durch Nullsetzen dieser Ausdrücke entstehenden Gleichungen umfaßt. Das kann z. B. bei dem früher betrachteten Systeme (A) eintreten, wenn D nicht vermöge (A) verschwindet.

Unter einem Systeme von der Art S versteht der Verf. nunmehr ein System S_k, das folgende Eigenschaften hat: Keine der p Gleichungen s_k ist eine Folge der übrigen und der N Gleichungen S_{k-1}. Durch einmalige Differentiation von S_{k-1} erhält man nur Gleichungen, die aus S_k folgen. Die $2p$ aus s_k durch einmalige Differentiation entstehenden Gleichungen folgen vermöge S_k aus $p+1$ unter ihnen. Dabei kann man es, nötigenfalls durch eine lineare Transformation von x, y, so einrichten, daß diese Gleichungen $(k+1)$-ter Ordnung aus

$$\frac{da_1}{dx} = 0, \ldots, \frac{da_p}{dx} = 0, \frac{da_p}{dy} = 0$$

folgen. Durch h-malige Differentiation findet man daher ein System S_{k+h}, dessen Gleichungen $(k+h)$-ter Ordnung aus

$$\frac{d^h a_\mu}{dx^h} = 0 (\mu = 1, \ldots, p-1), \frac{d^h a_p}{dx^{h-i} dy^i} = 0 \; (i = 1, \ldots, h)$$

folgen, das also wieder ein System von der Art S ist. Ein solches System von der Art S ist z. B. das früher betrachtete System (A), wenn $[fF] = 0$ eine Folge von (A) ist, und zwar gilt das, mag nun $D \neq 0$ sein oder vermöge (A) verschwinden. Der Unterschied zwischen beiden Fällen besteht darin, daß im ersten Falle (A) reguläre Form hat, während im zweiten gewisse Gleichungen von (A) weggelassen werden müssen, wenn die reguläre Form hergestellt werden soll.

Hat man ein System von der Art S und liegt S_k nicht in regulärer Form vor, so können sieh aus den p Gleichungen k-ter Ordnung die Ableitungen k-ter Ordnung eliminieren lassen. Gibt es unter den ss gerade $p - r$, die unabhängig sind in bezug auf die Ableitungen k-ter Ordnung, so gibt es, wie der Verf. zeigt, unter den Gleichungen s_{k+1} gerade $p + 1 - r$ solche, die unabhängig sind in bezug auf die Ableitungen $(k+1)$-ter Ordnung. Hieraus folgt, daß bei einem in regulärer Form vorliegenden System von der Art S die durch Differentiation hervorgehenden $p+h$ Gleichungen $(k+h)$-ter Ordnung in bezug auf ebensoviele Ableitungen $(k+h)$-ter Ordnung unabhängig sind, daß also jedes solche System vollständig integrabel ist. Im Falle $p = k+1$ hängt seine allgemeinste Lösung von $\frac{1}{2}k(k+1) - N$ willkürlichen Konstanten ab; im Falle $p < k+1$ ist es ein Involutionssystem, dessen allgemeinste Lösung $k+1-p$ willkürliche Funktionen eines Arguments und außerdem möglicherweise noch willkürliche Konstanten enthält.

Jedes System von der Art S, das noch keine reguläre Form hat, kann durch ein äquivalentes reguläres System von der Art S ersetzt werden, dem höchstens gewisse singuläre Lösungen des ersten nicht genügen. Man muß dazu schrittweise vorgehen und zuerst dafür sorgen, daß die Gleichungen k-ter Ordnung reguläre Form bekommen, dann die Gleichungen $(k-1)$-ter Ordnung usw. Dabei kann sich eine Relation zwischen x, y, z allein ergeben. Ist diese einzig in ihrer Art und nicht von z frei, so ist sie die einzige Lösung des Systems, andernfalls ist das System unmöglich. Es kann auch sein, daß das reguläre System, zu dem man gelangt, aus einem Systeme von der Art S, aber von niedrigerer als k-ter Ordnung, durch Differentiation hervorgeht. Als Anwendung zeigt der Verf., wie das System (A) im Falle $m = 3, M = 4$ auf reguläre Form zu bringen ist, je nach der Zahl der charakteristischen Richtungen die $f = 0$ und $F = 0$ gemein haben.

Ist ein vorgelegtes System k-ter Ordnung T_k an sich nicht von der Art S, so kann es doch bei Berücksichtigung gewisser nicht in ihm enthaltener Relationen $U_1 = 0, \ldots, U_\lambda = 0$ höchstens k-ter Ordnung zu einem Systeme von der Art S werden. Ein solches System nennt der Verf. ein System von der Art T. Hat das System reguläre Form und wird diese Eigenschaft durch Hinzunahme der Gleichungen $U_\mu = 0$ nicht aufgehoben, so sind die $U_\mu = 0$ seine Integrabilitätsbedingungen. Hat es noch nicht die reguläre Form, so sind für $\rho \leqq k$ die m_ρ Gleichungen ρ-ter Ordnung $T_\rho = 0$ des Systems im allgemeinen nur in bezug auf $l_\rho \leqq m_\rho$ Ableitungen ρ-ter Ordnung voneinander unabhängig. Haben dann die Gleichungen $U_\mu = 0$ nicht die Folge, daß eine dieser Zahlen l_ρ verkleinert wird, so kann man das System T_k ohne Benutzung der Gleichungen $U_\mu = 0$ auf reguläre Form bringen, und dieses reguläre System ist dann und nur dann vollständig integrabel, wenn es die Gleichungen $U_\mu = 0$ nach sich zieht.

So ist z. B. das System (A) bei Berücksichtigung von $[fF] = 0$ ein System von der Art T. Darin liegt, daß (A) in jedem Falle, auch wenn die Gleichungen $f = 0, F = 0$ charakteristische Richtungen gemein haben, vollständig integrabel ist, sobald es die Gleichung $[fF] = 0$ nach sich zieht. Als Beispiele werden die Fälle $m = 1, M = 2; m = M = 2$ besproehen sowie der Fall $M = m$, wenn beide Gleichungen gerade m charakteristische Richtungen gemein haben.

Schließlich werden die Systeme von Differentialgleichungen besprochen, durch die die singulären Lösungen eines Systems (A) definiert werden. Haben z. B. die Gleichungen (2) keine charakteristische Richtung gemein, ist also D nicht $=0$ vermöge (A), so werden durch Hinzunahme von $D = 0, [fF] = 0$ möglicherweise gewisse singuläre Lösungen von (A) definiert. Dabei ist (A) ein System von der Art T, wenn man die Gleichungen $D = 0, [fF] = 0$ and ihre Ableitungen berücksichtigt.

Kap. 2 (S. 356-380) beginnt mit allgemeinen Betrachtungen über Systeme von zwei Gleichungen, die zwei Funktionen z, z' von x, y nebst ihren Ableitungen enthalten. Läßt sich daraus eine Differentialgleichung für z allein und eine z' allein ableiten, so bestimmt das System eine Transformation zwischen diesen beiden Gleichungen. Hat die eine Gleichung des Systems die Form

$$z' = \varphi(x, y, z, \dots, p_{0,m}),$$

so kann man die andere in der Form $\Phi(x, y, z, \dots, p_{0,M}) = 0$ annehmen. Der Verf. betrachtet den schon von *Goursat* untersuchten Fall $z' = q$ und den Fall $z' = t$. Sodann wendet er sich zu einer Untersuchung, die er als Verallgemeinerung des *Bäcklund*schen Problems bezeichnet, nämlich zu der Frage, wann ein System von vier Gleichungen

$$F_i(x, y, z, \dots, p_{0,m_i}; x', y', z', \dots, p'_{0,m'_i}) = 0 \ (i = 1, \dots, 4)$$

ein punktweises Entsprechen zwischen zwei Flächen definiert. Denkt man sich z als Funktion von x, y, so erhält man durch Elimination von x, y zwei Differentialgleichungen in x', y', z' und daraus ein System (A'), dessen Integrabilitätsbedingungen man aufstellen und zu dem man noch die Bedingungen dafür fügen kann, daß die beiden Gleichungen für z' eine bestimmte Anzahl von charakteristischen Richtungen gemein haben. Läßt sich aus den so gewonnenen Gleichungen eine von $x', y', z', p'_{1,0}, \dots$ freie Gleichung ableiten, so entsprechen jeder Integralfläche dieser Gleichung alle Integralflächen eines gewissen vollständig integrabeln Systems. Nach kurzer Besprechung des von *Bäcklund* untersuchten Falles $m_i = m'_i = 1$, wendet sich der Verf. zu dem Falle, wo F_1, F_2, F_3 nur Ableitungen erster Ordnung enthalten, F_4 Ableitungen zweiter Ordnung und zu dem, wo $m'_1 = m'_2 = m', m'_3$ und $m'_4 \leqq m'$ und wo die beiden Gleichungen, die das System (A') liefern, m' charakteristische Richtungen gemein haben. Ausführlich betrachtet er ein System, das aus 4 Gleichungen:

$$F(x', y', z', p', q', x, y, z, p, q) = 0, \frac{dF}{dx'} = 0, \frac{dF}{dy'} = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dx'^2}\frac{d^2F}{dy'^2} - \left(\frac{d^2F}{dx'dy'}\right)^2 = 0$$

besteht. Er findet z. B., daß man für

$$F = p' + p + \varphi_1(z, x', y', q') + \varphi_2(z', x, y, q)$$

eine Transformation zwischen zwei Gleichungen dritter Ordnung erhält und außerdem eine Transformation zwischen zwei Systemen vierter Ordnung.

Kap. 3 (S. 380-412) ist den auch schon von *Bäcklund* untersuchten Transformationen gewidmet, die durch drei solche Gleichungen

$$F_i(x', y', z', p', q', x, y, z, \dots, p_{0,m}) = 0 \ (i = 1, 2, 3)$$

definiert sind, die im Raume x', y', z' einen Verein von ∞^2 Elementen darstellen. Der Verf. beschränkt sich auf den Fall, daß dieser Verein eine Fläche ist, so daß die Gleichungen die Form:

$$(4) \quad F(x', y', z', x, y, z, \dots, p_{0,m}) = 0, \frac{dF}{dx'} = 0, \frac{dF}{dy'} = 0$$

haben. Im allgemeinen entsprechen zwei Flächen des Raumes x, y, z, die längs einer Kurve die Elemente n-ter Ordnung gemein haben, zwei Flächen des Raumes x, y, z mit längs einer Kurve gemeinsamen Elementen erster Ordnung. Der Verf. untersucht, wann die letzteren Flächen längs der Kurve die Elemente zweiter Ordnung gemein haben. Eine partielle Differentialgleichung in x, y, z geht im allgemeinen in ein System von Differentialgleichungen in x', y', z' über, es kann aber auch vorkommen, daß sich dieses System auf eine Gleichung reduziert.

Nach einigen Bemerkungen über die Enveloppe einer Schar von ∞^2 Flächen kehrt der Verf. zu den Gleichungen (4) zurück. Im Raume x, y, z gibt es zwei ausgezeichnete Differentialgleichungen, eine von $(n+1)$-ter Ordnung (σ_{n+1}), die durch Elimination von x', y', z' aus (4) und

$$\delta = \frac{d^2F}{dx^2}\frac{d^2F}{dy^2} - \left(\frac{d^2F}{dxdy}\right)^2 = 0$$

entsteht, eine von n-ter Ordnung (θ_n), die ebenso aus (4) und

$$\nabla = \frac{d^2F}{dxdx'}\frac{d^2F}{dydy'} - \frac{d^2F}{dxdy'}\frac{d^2F}{dydx'} = 0$$

hervorgeht; dabei ist (θ_n) ein intermediäres Integral von (σ_{n+1}). Es wird untersucht, wie sich diese Differentialgleichungen bei der Transformation verhalten.

Enthält F im Falle $n = 2$ die Größen x, y, z, p, q nur in den vier Invarianten einer eingliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen, so wird die Gleichung zweiter Ordnung (θ) in eine einzige Gleichung zweiter Ordnung transformiert, während sie im allgemeinen in ein Involutionssystem von zwei Gleichungen dritter Ordnung übergeht. Der Verf. fragt, ob jede beliebige Gleichung zweiter Ordnung die Gleichung (Θ) sein kann, die zu einer durch ein System (4) definierten Transformation gehört. Die Antwort lautet bejahend. Insbesondere stellt sich heraus, daß jede partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, die eine infinitesimale Berührungstransformation gestattet, zu einer Transformation gehört, bei der sie in eine Gleichung zweiter Ordnung übergeht, die mindestens ein System von Charakteristiken erster Ordnung besitzt. Im Falle $n = 3$ dagegen ergibt sich, daß nicht jede Gleichung dritter Ordnnng die Gleichung (Θ) für eine Transformation der betrachteten Art ist. (IV 9.)

Reviewer: Engel, Prof. (Gießen)

Full Text: EuDML