Nörlund, N. E.

Sur l'existence de solutions d'une équation linéaire aux différences finies. (French)

JFM 45.0501.16
Ann. de l'Éc. Norm. (3) 31, 205-221 (1914).

Verf. betrachtet eine homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{n} P_i(x)u(x+i) = 0,$$

worin x eine komplexe Variable ist und die Koeffizienten $P_i(x)$ analytische Funktionen von x sind, und zeigt zunächst, daß im allgemeinen *keine analytische* Lösung derselben existiert, die *gegebenen Anfangsbedingungen* genügt, d. h., wenn $x = \sigma + \tau i$, in einem Streifen $c \leqq \sigma < c + n$ (c beliebige reelle Zahl) gleich einer gegebenen Funktion ist (vgl. *Pincherle* u. *Amaldi*, Le operazioni distributive e le loro applicazioni all' analisi, Bologna 1901, Kap. X; F. d. M. *32*, 75-78). Ref., der im 1. Kapitel seines mit *Alf Guldberg* verfaßten Buches "Theorie der linearen Differentialgleichungen" (Leipzig 1911) solche Lösungen für *reelle* x betrachtet hat, glaubt im Gegensatz zum Verf., daß dieselben trotzdem – insbesondere im Hinblick auf Probleme der Physik und Technik – ebensowenig bedeutungslos sind wie die nichtanalytischen Lösungen partieller Differentialgleichungen mit gegebenen Anfangsbedingungen (vgl. etwa das Problem der schwingenden Saite mit gegebener Anfangsform). – Alsdann gibt Verf. eine von der des Ref. ein wenig abweichende Definition eines Fundamentalsystems von Lösungen der Gleichung (1) und beweist mit entsprechender Abänderung die vom Ref. in dem obengenannten Buch darüber im Anschluß an *Casorati, Pincherle, Heymann* und *Markoff* entwickelten Sätze. Die Definition des Verf. hat den Vorteil, daß die "Determinante der Fundamentallösungen" nur für die singulären Punkte der Differentialgleichung verschwindet; aber nach dieser Definition würden z. B. für die Differentialgleichung zweiter Ordnung $u(x+2) - (a_1 + a_2)u(x+1) + a_1a_2u(x) = 0$ $(a_1 \neq a_2)$ die beiden Lösungen a_1^x und $a_1^x + a_2^x \sin 2\pi x$ *kein* Fundamentalsystem bilden, obwohl sie die wesentliche Eigenschaft eines solchen besitzen, daß die allgemeine Lösung sich als homogene lineare Funktion derselben mit periodischen Koeffizienten (von der Periode 1) darstellen läßt. Dagegen kann dem Mangel, welcher der Definition des Ref. anhaftet und den Verf. zu seiner etwas davon verschiedenen Definition veranlaßt hat, leicht dadurch abgeholfen werden, daß man Funktionen, die nur in diskreten Punkten von Null verschieden sind, von der Betrachtung ausschließt, wie es übrigens Ref. bereits in seinem Buche, (S. 258, Anm. 2) getan hat.

Endlich zeigt Verf., daß die Differentialgleichung (1) unter gewissen Voraussetzungen über das Verhalten der Koeffizienten $P_i(x)$ im Unendlichen stets ein Fundamentalsystem von *analytischen* Lösungen besitzt, welche in einem endlichen Bereich holomorphe Funktionen sind und als singuläre Stellen i. a. die Punkte der Mengen $(\beta):\ \beta_i + s$ $(i = 1, 2, 3, \dots;\ s = n, n+1, n+2, \dots;\ 0, -1, -2, \dots)$, $(\alpha):\ \alpha_i - s$, $(\gamma):\ \gamma_i + s$ $(s = 0, 1, 2, \dots)$ und der abgeleiteten Mengen haben, denen ev. noch der unendlich ferne Punkt hinzuzufügen ist: darin sind die β_i die wesentlich singulären Stellen der Koeffizienten, α_i die Nullstellen von $P_0(x)$ und γ_i die Nullstellen von $P_n(x-n)$. Die Punkte der Mengen (α) und (γ) sind Pole; die anderen Punkte sind i. a. wesentlich singuläre Stellen.

Für *reelle* x gilt der folgende Satz: Wenn für jeden endlichen Wert der reellen Veränderlichen x die Koeffizienten $P_i(x)$ der Gleichung (1) endlich und stetig und $P_0(x)$ sowie $P_n(x) \neq 0$ sind, so gibt es ein Fundamentalsystem von Lösungen, welche in einem endlichen Intervall stetige Funktionen von x sind und sich durch Reihen darstellen lassen, die in diesem Intervall gleichmäßig konvergieren.

Reviewer: Wallenberg, Prof. (Berlin)

Full Text: DOI Numdam EuDML