Tonelli, L.

Sur une méthode directe du calcul des variations. (French) JFM 45.0615.02

Palermo Rend. 39, 233-264 (1915).

Die in den vorstehend besprochenen Noten kurz mitgeteilten Ergebnisse werden in der vorliegenden Arbeit ausführlich dargelegt. Sei $f(x,y,y')$ eine in dem Gebiete

$$\text{(A)}\ a \leqq x \leqq b,\ -\infty < y < +\infty,\ -\infty < y' < +\infty$$

nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktion, die dort den Bedingungen $f_{y'^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \geqq 0$ und $f > -N$ genügt. Sei ferner

$$f(x,y,y') > |y'|^{1+\alpha} m(y) \quad (\alpha > 0,\ m(y) > 0)$$

in dem Gebiete

$$\text{(A')} \quad a \leqq x \leqq b,\ -\infty < y < +\infty,\ |y'| \geqq M,$$

unter $m(y)$ eine stetige, positive Funktion verstanden, die so beschaffen ist, daß

$$\lim_{y\to\infty} |y|^{1+\alpha} m(y) = +\infty$$

gilt. Sei $y(x)$ irgendeine in dem Intervalle $a \leqq x \leqq b$ erklärte *totalstetige* Funktion derart, daß das *Lebesgue*sche Integral

$$I(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx$$

existiert. Das *Integral* $I(y)$ *ist eine nach unten halbstetige Funktion der Kurve* $y(x)$. Mit anderen Worten, läßt sich jeder Zahl $\sigma > 0$ ein Wert $\varepsilon > 0$ zuordnen, so daß, wenn $y_0(x)$ eine den soeben genannten Bedingungen genügende Funktion bezeichnet, für alle ebensolche Funktionen $y(x)$ der Menge

$$|y(x) - y_0(x)| < \varepsilon$$

die Beziehung

$$I(y) > I(y_0) - \varepsilon$$

besteht.

Sei i die untere Grenze der Wertee $I(y)$ für allle soeben betrachteten Kurven $y(x)$, die überdies durch zwei vorgeschriebene Punkte $(a,p_a),(b,p_b)$ hindurchgehen und es sei $y_1(x), y_2(x)\dots, y_n(x)\dots$ eine Minimalfolge. Man kann diese konstruieren, ohne von dem Auswahlprinzip Gebrauch zu machen. Die Folge $y_n(x)$ hat mindestens eine Grenzfunktion $y_\infty(x)$; diese ist totalstetig. Es gilt ferner $y_\infty(a) = p_a,\ y_\infty(b) = p_b$,

$$I(y) = \int_a^b f(x,y,y')dx = i$$

Sei $(\overline{x},\overline{y})$ ein beliebiger Punkte des Streifens $a \leqq \overline{x} \leqq b$. Ist $f_{y'^2}(\overline{x},\overline{y},y')$ in keinem Intervall durchweg gleich Null, so hat $y_\infty(x)$ in $a \leqq x \leqq b$ eine stetige Ableitung und es gilt:

$$\frac{d}{dx} f_{y'}(x, x_\infty, y'_\infty).$$

Ist stets $f_{y'^2} > 0$, so folgt hieraus bekanntlich nach *Hilbert*, daß $y_\infty(x)$ stetige Ableitung zweiter Ordnung hat und der *Euler*schen Differentialgleichung genügt.

Sei jetzt $f_{y'^2} > 0$. Es wird gezeigt, daß *jede* totalstetige Funktion, die dem Integral $I(y)$ den kleinsten Wert erteilt, eine bestimmte Ableitungen hat, die endlich sein kann oder nicht. Diese Ableitung ist, abgesehen homogene höchstens von einer abgeschlossenen Menge der Punkte vom Maßeiner Null, endlich und stetig.

Auf der Komplementärmenge ist die zweite Ableitung vorhanden und stetig, auch gilt dort die *Euler*sche Gleichung. Die Ausnahmemenge ist gewiß nicht vorhanden, wenn z. B. f von y unabhängig, oder wenn $|f_y|$ beschränkt ist usw. Analoge Sätze gelten, wenn die Kurven $y(x)$ sämtlich in einem beschränkten, abgeschlossen Gebiet liegen. Auch ist die Beschränkung auf feste Grenzen nicht notwendig. Es genügt vielmehr anzunehmen, daß $y(x)$ einer Klasse von Kurven angehört, die sämtlich wenigstens einen Punkte enthalten, dessen Ordinate unterhalb einer festen Schranke liegt, und überdies so beschaffen sind, daß jede Grenzkurve einer Folge von Kurven der Kalsse selbst dieser Klasse angehört. Diese Bemerkung gestattet die Erledingung der Probleme des absoluten Minimums bei Vorhandensein der (isoperimetrischen) Nebenbedingung

$$K(y) = \int_a^b (M(x,y)dx + N(x,y)dy) = \text{Const.}$$

Auch steht nichts im Wege, die Integrale I und K zu vertauschen.

Reviewer: Lichtenstein, Prof. (Leipzig)

Full Text: DOI

References:

[1] Les principaux résultats de ce Mémoire ont été énoncés dans deux Notes insérées aux Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences [t. CLV1II (1914), pp. 1776–1778, 1983–1985]. 2) Nous suivrons dans ce Mémoire la terminologie de IVEncyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées {" [II 3, pp. 316–318; II 31, p. I; –voir aussiCh. J. de la Vallée Poussin,Cours d'Analyse, 3e édition, t. I (Paris, Gauthier-Villars, 1914), pag. 129]; au lieu demaximum, minimum, extremum, nous dirons donc toujoursmaxime, minime, extremé, et nous conjuguerons les verbesmaximer, minimer, extrémer.}

[2] C. Arzelà,Sul principio di Dirichlet [Rendiconto delle sessioni della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, nuova serie, vol. I (1896-97), pp. 71–84].

[3] D. Hilbert,Ueber das Dmicmjei'sche Prinzip [Jahresbericht der Deutschen Mathematiker- Vereinigung, Bd. VIII(1900), pp. 184–188J,Über das Dirichletic6"Prinzip [Festschrift zur Feier des 150 jähigen Bestehens der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (Göttingen, 1901), pp. 1-27].

[4] C'est-à-dire une suite telle, que celle des intégrales respectives tend vers la limite inférieure que l'on doit démontrer être un minime.

[5] C'est-à-dire problème relatif à des champs – par exemple, circulaires – suffisamment petits.

[6] Ce que nous avons dit s'applique aussi aux procédés employés parMM. B. Levi,Fubini, Lebesgue pour résoudre le problène de Dirichlet et parM. Bolza et M. Carathéodory en d'autre cas. Dans le cas des intégrales curvilignes, si l'on admet la résolubilité et l'unicité de la solution du problème" im KUinen {" et que l'on se borne à des champs" extremal-convex {", le problème de minimer se réduit à celui d'une fonction continue ordinaire. C'est à M. Hadamard d'abord, et à M. Signorini, ensuite, qne l'on doit cette remarque.}}

[7] J. Hadamard, a)Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées [Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France et imprimés par son ordre, t. XXXIII, n{\(\deg\)} 4 (1908), pp. 1–128] etb) Sur une méthode de calcul des variations [Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. CXLIII (2e semestre 1906), pp. 1127-1129].

[8] Cfr. le Mémoire cité 8) a), IVe Partie, {\S} 4. 10) Notre critique s'adresse aussi aux méthodes de M. Hilbert.

[9] H. Lebesgue,Intégral, Longueur, Aire [Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, tomo VII (1902), pp. 231–359]. · Zbl 33.0307.02 · doi:10.1007/BF02420592

[10] L. Tonelli,Sui massimi e minimi assoluti del calcolo delle variazioni [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXII (20 semestre 1911), pp. 297–337];Sul caso regolare nel Calcolo delle Variazioni [Ibidem, t. XXXV (I{\(\deg\)} semestre 1913), pp. 49-73]; etc. · Zbl 42.0400.01 · doi:10.1007/BF03014804

[11] L. Tonelli,Sulle funzioni di linee [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIII, I{\(\deg\)} semestre 1914, pp. 28–33].

[12] Nous nous bornons aux intégrales portant sur des courbes planes. Si la courbe en question a des coordonnées, en fonction de l'arc, toujours continues avec leurs dérivées des deux premiers ordres, nous pouvons facilement déduire notre proposition d'une autre de M. Lindebergj. W. Lindeberg,Über einige Fragen der Variationsrechnung [Mathematische Annalen, Bd. LXVII (1909), pp. 340-354] dont récemment M. E. E. Levi a donné une nouvelle démonstration E. E. Levi,Sopra un teorema del Calcolo delle Variazioni del sig. Lindeberg [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXVII (I{\(\deg\)} semestre 1914), pp. 245-248]. Dans le cas général auquel l'on est forcement amené, la proposition

[13] S. Bernstein,Sur les équations du calcul des variations [Annales Scientifiques de l'école Normale supérieure, IIIe série, t. XXIX (1912), pp. 431–485]. · Zbl 43.0460.01 · doi:10.24033/asens.651

[14] 1. c. 8).

[15] Cfr.L. Tonelli,Sul valore di un certo ragionamento [Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, t. XLIX (1913-1914), pp. 4–14]. · Zbl 45.0614.01

[16] G. Vitali,Sulle funzioni integrali [Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, Vol. XL (1904-1905), pp. 1021–1034]. Nous rappelons cette définition. On dit qu'une fonctionf(x) estabsolument continue dans (a,V) si, étant donné un nombre positif {\(\sigma\)}, arbitraire, on peut toujours déterminer un autre nombre {\(\mu\)}\< 0 tel que l'on ait \(\left|{\Sigma \{ f(\beta _i) - f(\alpha _i)\} } \right|< \sigma \) , oò la somme est étendue à un ensemble quelconque d'intervalles ({\(\alpha\)}i{\(\beta\)}i) de(a, b), sans parties communes, ayant une mesure totale plus petite que {\(\mu\)}. Nous rappelons aussi, qu'en vertu de la continuité absolue,f(x) admet la dérivéef(x) finiepresque partout [c'est-à-dire, pour tous les points de(a, b) sauf pour un ensemble de mesure nulle] et l'on a \(f(x_2) - f(x_1) = \smallint _{x_1 }^{x_2 } f'(x)dx\) . Réciproquement toute fonction, qui est une intégrale, est absolument continue.

[17] Ces points formeraient un ensemble de mesure {\(\deg\)}n. [Voir Ch. J..de la Vallée Poussin, 1. c. 2), pag. 67].

[18] F. RiESZ,über die Approximation einer Funktion durch Polynome [Jahresbericht der Deutsdien Mathematiker-Vereinigung, Bd. XVII (1908), pp. 196–211]. · Zbl 39.0471.04

[19] F. Riesz,Untersuchungen über Système integrierbarer Funktionen [Mathematische Annalen, Bd. LXIX (1910), pp. 449–497]. · Zbl 41.0383.01 · doi:10.1007/BF01457637

[20] 1. C. 22).

[21] 1. C. 17).

[22] L'existence d'une fonction limitey (x) pour la suite (13) et la continuité absolue de cettey pouvaient se déduire aussi d'un théorème général démontrer parM. Riesz [1. c. 22), {\S} 7]. 10) que la I soit satisfaite;

[23] Cfr.Hadamard, 1. c. 8) a), pag. 90.

[24] 1. C. '5).

[25] P. Painlevé,Leçons surla théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm (Paris, A. Hermann, 1897), pag. 560, etS. Bernstein, 1. c. 15), pag. 433.

[26] En s'appuyant d'un côté sur une proposition deM. Darboux [G. Darboux,Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal, IIIe Partie (Paris, Gauthier-Villars, 1894), pag. 83, etO. Bolza,Vorlesungen über Variationsrechnutig (Leipzig, G. B. Teubner, 1909), p. 438] sur les maximes absolus, et de l'autre sur un théorème deM. Cantor relatif aux ensembles d'intervalles distincts d'une droite, on peut dans les condictions que nous venons d'énoncer, établir facilement que, ayant fixé le pointP a , par chaque point de la droitex – b, sauf tout au plus par ceux d'un ensemble dénombrable, il passe toujoursune seule courbey = y (x) (n{\(\deg\)} 2) qui le joint avecP a et qui minimeJ. Dans le cas que la variation seconde de /, débarassée des termes en {\(\delta\)}2 y et {\(\delta\)}2 y'é, soit toujours positive, non nulle [Cfr. Hadamard, 1. c. 8)a), IVe Partie, {\S} 3] l'ensemble exceptionnel disparait et l'on a toujours l'unicitè du minimant.

[27] L. Tonelli,Sul problema degli isoperimetri [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XXII, I{\(\deg\)} semestre 1913, pp. 424–430]. Au sujet de ce problème isopérimétrique voir aussi:J. Hadamard,Sur quelques questions de calcul des variations [Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, IIIe Série, t. XXIV (1907), pp. 203-231], etJ. Hadamard,La construction de Weierstrasset l'existence de l'extremum dans le problème isopérimétrique [Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, t. XXI (1913), pp. 251-287].