Furtwängler, Ph.

Die Reziprozitätsgesetze für Potenzreste mit Primzahlexponenten in algebraischen Zahlkörpern. (Dritter und letzter Teil.). (German) JFM 44.0244.02

Math. Ann. 74, 413-429 (1913).

Die beiden ersten Teile (F. d. M. 40, 265 (JFM 40.0265.*), 1909 und 43, 272, 1912) enthielten die Entwicklungen für ungerade Primzahlen und für 2, falls weder der Grundkörper reell, noch unter seinen konjugierten reelle vorhanden sind. Der noch übrigbleibende Fall wird in dieser Arbeit erledigt. Das Verfahren ist dasselbe. So wird das allgemeine quadratische Reziprozitätsgesetz erhalten: Sind α und β zwei zueinander und zu 2 teilerfremde Zahlen eines Körpers k, von denen eine primär und total positiv ist, so gilt in k:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Die beiden Ergänzungssätze lauten: 1. Ist $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal, so kann man eine primäre, total positive Zahl α so wählen, daß $(\alpha) = \mathfrak{a}\mathfrak{q}^2$ wird, wo $\mathfrak{q}$ ein geeignetes Ideal ist. Ist α eine total positive primäre Zahl und $(\alpha) = \mathfrak{a}\mathfrak{q}^2$, so ist $\mathfrak{a}$ ein primäres Ideal. 2. Ist $\mathfrak{a}$ ein hyperprimäres Ideal, so kann man $(\alpha) = \mathfrak{a}\mathfrak{a}'^2$ als hyperprimäre positive Zahl wählen. Ist α eine total positive hyperprimäre Zahl, so ist (α) ein hyperprimäres Ideal. Hieraus folgt das *Hilbert*sche quadratische Reziprozitätsgesetz:

$$\prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{v, \mu}{\mathfrak{w}}\right) = 1,$$

wo v, μ beliebige Zahlen sind und das Produkt über alle Primideale $\mathfrak{w}$ und die Symbole $1^{(i)}$ zu erstrecken ist.

Reviewer: Fueter, Prof. (Zürich)

Full Text: DOI EuDML

References:

[1] Erster Teil, 67 (1909); zweiter Teil, 72 (1912). Die beiden Aufsätze sind hier kurz mit Teil I und Teil II zitiert. Ferner ist zu vergleichen: Ph. Furtwängler, Allgemeiner Beweis des Zerlegungssatzes für den Klassenkörper, Gött. Nachr. 1911 (zitiert als ?Zerlegungssatz?).

[2] Über die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers Math. Ann. 51 (1899), und Über die Theorie der relativ Abelschen Zahlkörper, Gött. Nachr. 1898.

[3] Das allgemeine quadratische Reziprozitätsgesetz in ausgewählten Kreiskörpern der 2 hten Einheitswurzeln, Diss. Gött. 1900.

[4] Quadratische Reziprozitätsgesetze in algebraischen Zahlkörpern, Diss. Gött. 1901.

[5] Vgl. Teil I, {\S} 2.

[6] Vgl. Ph. Furtwängler, Existenzbeweis für den Klassenkörper, {\S} 10, Math. Ann. 63 (1906).

[7] Vgl. Teil I, {\S} 6-8.