Radon, J.
Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen. (German)
JFM 44.0464.03
Wien. Ber. 122, 1295-1438 (1913).

Die inhaltsreiche, an die Arbeiten von *H. Lebesgue, F. Rieß, E. Hellinger* anknüpfende Abhandlung gliedert sich in acht Abschnitte. In dem ersten wird der Begriff einer absolut additiven Mengenfunktion eingeführt.

Unter den in dem "Intervalle" $I = \begin{bmatrix} M, \dots, & M \\ -M, \dots, & -M \end{bmatrix}$ $(M > 0)$ enthaltenen n-dimensionalen $(n \geqq 1)$ Mengen wird eine Klasse T ausgezeichnet, die folgenden Forderungen genügt:

a) Alle (halb offenen) Intervalle $x_i' \leqq x_i < x_i''$ $(x_i' < x_i'',\ i = 1, \dots, n)$ gehören zu T.

b) Gehören zwei Mengen E_1 und E_2 zu T, so gehören auch ihr Durchschnitt E_1E_2, sowie die Menge $E_1 - E_2$ der Punkte von E_1, die nicht Punkte von E_2 sind, zu T.

c) Sind E_i $(i = 1, 2, \dots)$ abzählbar viele Mengen in T ohne gemeinsame Elemente (disjunkte Mengen), so gehört die Vereinigungsmenge $\sum E_i$ zu T. Offenbar enthält T alle im *Borel*schen Sinne meßbaren Mengen in I. Wird jeder Menge E in T ein Wert $f(E)$ zugeordnet, so heißt $f(E)$ eine "Mengenfunktion mit dem Definitionsbereich T".

Es seien E_i $(i = 1, 2, \dots)$ beliebige abzählbar viele disjunkte Mengen in T. Ist $\Sigma f(E_i)$ konvergent und (1) $f(\Sigma E_i) = \Sigma f(E_i)$, so heißt $f(E)$ "absolut additiv" (a. a.).

Offenbar konvergiert $\sum f(E_i)$ stets unbedingt. Ist $\sum_i^{1,\dots,n} E_i = E$ irgendeine Einteilung von E in disjunkte Bestandteile, so ist (2) $\sum_i^{1,\dots,n} |f(E_i)| < N$ (N von E und E_i $(i = 1, \dots, n)$ unabhängig): Die a. a. Mengenfunktionen sind von beschränkter Schwankung (quasimonoton). Es gut $f(E) = \varphi(E) - \psi(E)$, unter φ und ψ a. a. Mengenfunktionen verstanden, die $\geqq 0$ sind (monotone a. a. Mengenfunktionen, m. a. a.).

Der Einfachheit halber wird jetzt $n = 2$ gesetzt, und es wird der folgende, die *Lebesgue*sche Theorie des Maßes als speziellen Fall enthaltende Satz bewiesen: Zu einer jeden im Gebiete $-M \leqq x \leqq M$, $-M \leqq y \leqq M$ definierten, für $x = -M$ und $y = -M$ verschwindenden, im übrigen positiven, den Beziehungen

$$(3) \qquad F(a', b') - F(a', b) - F(a, b') + F(a, b) \geqq 0,\ a' \geqq a,\ b' \geqq b,\ \lim_{h,k=0} F(a-h, b-k) = F(a, b)\ (h, k \geqq 0)$$

genügenden Funktion, gehört eine m. a. a. Mengenfunktion (m. a. a. M.) $f(E)$, deren Definitionsbereich T den eingangs gestellten Forderungen genügt, so daß überdies

$$(4) \qquad f\left(\begin{bmatrix} a' & b' \\ a & b \end{bmatrix}\right) = F(a', b') - F(a', b) - F(a, b') + F(a, b)$$

gilt. Die gefundene Funktion f hat überdies die Eigenschaft, daß nach Festsetzung von $\varepsilon > 0$ in jeder Menge E in T eine abgeschlossene Menge E' so bestimmt werden kann, daß

$$(5) \qquad f(E) - f(E') < \varepsilon$$

wird.

Ist umgekehrt f eine m. a. a. M., und nimmt man

$$(6) \qquad F(x, u) = f\left(\begin{vmatrix} x & y \\ -M & -M \end{vmatrix}\right)\ (-M < x \leqq M,\ -M < y \leqq M),\ 0 = F(x, -M),\ 0 = F(-M, y),$$

so gewinnt man nach dem Vorstehenden eine m. a. a. M. f_1 mit dem Definitionsbereich T_1, der mit T alle im *Borel*schen Sinne meßbaren Mengen in I gemeinsam hat. Gehört E sowohl T_1, als auch T an, so ist $f(E) = f_1(E)$. In den Mengen von T_1, die in T nicht enthalten sind, wird per definitionem $f(E) = f_1(E)$ gesetzt, T_1 ist der "natürliche Definitionsbereich" von $f(E)$. Gilt (5), so enthält T_1 ganz T. In einer naheliegenden Weise wird dieser Begriff auf a. a. M. schlechthin übertragen.

Im folgenden wird stets (5) vorausgesetzt. Der natürliche Definitionsbereich läßt sich unter Einhaltung der Eigenschaft (5) nicht mehr erweitern.

Eine m. a. a. M. $b(E)$ wird eine Basis der a. a. M. $f(E)$ genannt, wenn für alle Mengen, für welche $f(E)$ definiert und $b(E) = 0$ ist) auch $f(E) = 0$ ist. Der natürliche Definitionsbereich von f umfaßt denjenigen von b.

In dem II. Abschnitt wird der Begriff des *Stieltjes*schen Integrals wie folgt verallgemeinert:

Sei $F(P)$ eine auf einer Menge E_0 von I erklärte, gleichmäßig stetige Funktion von $x_1, \dots, x_n$ und f eine a. a. M., zu deren Definitionsbereich T auch E_0 gehört. Es sei $E_0 = \sum_i^{1,\dots,n} E_i$, unter E_i disjunkte Mengen von T verstanden, und P_i irgendein Punkt in E_i $(i = 1, \dots, n)$.

Die Summe $\sum_i^{1,\dots,n} F(P_i) f(E_i)$ nähert sich einem Grenzwert, wenn der größte "Durchmesser" $\varPi$ der Teilungsmengen E_i gegen Null konvergiert:

$$(7) \qquad \lim_{\varPi=0} \sum_i^{1,\dots,n} F(P_i) f(E_i) = \int_{E_0} F(P) df.$$

Eine andere Verallgemeinerung des *Stieltjes*schen Integrals wird gewonnen, wenn die auf E_0 erklärte Funktion $F(P)$ "meßbar bezüglich der a. a. M. $f(E)$" vorausgesetzt wird. Dies besagt, daß für alle A die Menge der Punkte P, in welchen $F(P) > A$ ist, zum Definitionsbereiche T von f gehört. Sei f zunächst monoton, $F \geqq 0$,

$$0 = y_0 < y_1 < \dots (y_{n+1} - y_n < \alpha,\ n = 0, 1, \dots),\ lim_{n=\infty} y_n = \infty,$$

E_k die Menge der Punkte von E, so daß $y_k \leqq F(P) < y_{k+1}$ ist. Hat der Ausdruck

$$(8) \qquad lim_{a=0} \sum_i^{1,\dots,n} y_i f(E_i)$$

eine bestimmte Bedeutung, so stellt er die fragliche zweite Verallgemeinerung des *Stieltjes*schen Integralbegrifis dar. Von hier aus gelangt man zu der allgemeinen Definition, wenn f eine schlechthin a. a. M. ist und $F \gtreqless 0$ sein kann (F bezüglich f summierbar).

Der dritte Abschnitt behandelt die stetigen linearen Funktionaloperationen. Es möge einer jeden auf einer abgeschlossenen Menge δ_0 (gleichmäßig) stetigen Funktion $F(P)$ ein Wert $U(F)$ zugeordnet sein, so daß

$$(9) \qquad U(F_1 + F_2) = U(F_1) + U(F_2), \lim_{n=\infty} U(F_n) = U(F)$$

gilt, falls F_n für $n = \infty$ gegen F auf E_0 gleichmäßig konvergiert. Es ist $|U(F)| \leqq N \mathrm{Max}|F|$ ($N =$ Maximalzahl der stetigen linearen Funktionaloperation).

Jede stetige lineare Funktionaloperation läßt sich in der Form

$$(10) \qquad U(F) = \int_{E_0} F df$$

darstellen, unter f eine a. a. M., deren Definitionsbereich E_0 enthält, verstanden.

Sei $g(E)$ eine a. a. M. mit der Basis $f(E)$ (f eine m. a. a. M.). In dem Definitionsbereich von f läßt sich g durch das verallgemeinerte *Stieltjes*sche Integral

$$(11) \qquad g(E) = \int_E \varPsi(P) df,$$

unter $\varPsi$ eine bezüglich f summierbare Funktion verstanden, darstellen (IV. Abschnitt).

Der V. Abschnitt bringt eine Verallgemeinerung des *Hellinger*schen Integralbegriffes.

Es sei $f(E)$ eine a. a. M., $b(E)$ eine Basis von f, E eine Menge des natürlichen Definitionsbereiches T von b, Π irgendeine Teilung von E in eine endliche Anzahl disjunkter Teilmengen. Liegt der Ausdruck

$$\sum_{i}^{1,\dots,n} \frac{|\Delta f_i|^p}{(\Delta b_i)^{p-1}} \quad (p > 1), \tag{12}$$

unter Δf_i, Δb_i die Werte von f und b auf E_i verstanden (ist $\Delta b_i = 0$, so wird dabei $\frac{|\Delta f_i|^p}{(\Delta b_i)^{p-1}}$ gleich Null gesetzt), für alle E und Π unterhalb einer festen Schranke M^p, so heißt f zu der Klasse $L_p(b)$ gehörig. Die obere Grenze von (12) für alle Π stellt bei festem E eine m. a. a. M. dar:

$$\int_E \frac{|df|^p}{db^{p-1}}. \tag{13}$$

Es möge jetzt g eine der Klasse $L_{\frac{p}{p-1}}(b)$ angehörende Mengenfunktion, Π_n $(n = 1, 2, \dots)$ eine Folge von Teilungen der Menge E bezeichnen, so daß stets Π_{n+1} eine Unterteilung von Π_n ist. Es existiert der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \sum_E \frac{\Delta f \Delta g}{\Delta b} = \int_E \frac{df\, dg}{db} \tag{14}$$

und stellt eine a. a. M. dar.

Einer jeden Mengenfunktion der Klasse $L_p(b)$ sei eine Zahl $L(f)$ zugeordnet, und es sei

$$L(f + g) = L(f) + L(g),\ |L(f)| \leq M,\ \text{falls} \int_I \frac{|df|^p}{dp^{p-1}} \leq 1 \text{ ist.} \tag{15}$$

$L(f)$ ist eine "beschränkte lineare Funktionaloperation im Gebiete der Klasse $L_p(b)$" ("Linearoperation vom Typus $\left\{ {p \atop b} \right\}$").

Es gilt

$$L(f) = \int_I \frac{df\, dl}{db}, \tag{16}$$

unter $l(b)$ eine bestimmte zu der Klasse $L_{\frac{p}{p-1}}(b)$ gehörende a. a. M. verstanden.

Es mögen weiter a und b zwei m. a. a. M. bezeichnen. Einem jeden Funktionenpaare φ und ψ, die entsprechend zu $L_p(a)$ und $L_q(b)$ gehören, sei eine Zahl $B(\varphi, \psi)$ zugeordnet, so daß

$$B(\varphi_1 + \varphi_2, \psi_1 + \psi_2) = B(\varphi_1, \psi_1) + B(\varphi_2, \psi_1) + B(\varphi_1, \psi_2) + B(\varphi_2, \psi_2), \tag{17}$$

$$|B(\varphi, \psi)| \leqq M \quad (M \text{ konstant}), \tag{18}$$

sobald

$$\int_I \frac{|d\varphi|^p}{da^{p-1}} \leqq 1, \quad \int_I \frac{|d\psi|^q}{db^{q-1}} \leqq 1.$$

B heißt eine "beschränkte bilineare Funktionaloperation vom Typus $\left\{ {p,\ q \atop a,\ b} \right\}$". Über die beschränkten linearen und bilinearen Funktionaloperationen wird in den Abschnitten VI und VII eine lange Reihe wichtiger Sätze abgeleitet, über die auf das Original verwiesen werden muß.

Sei, unter E und $\overline{E}$ zwei zu dem Definitionsbereiche von a gehörige Mengen verstanden,

$$u_E(\overline{E}) = a(E\overline{E}), \quad l_\psi(E) = B(u_E, \psi). \tag{19}$$

l_ψ ist für jedes ψ von $L_q(b)$ eine a. a. M. der Klasse $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$.

Durch (19) ist eine "beschränkte lineare Funktionaltransformation" $l_\psi = B[\psi]$ definiert.

Ein Hauptproblem der Theorie ist die Auflösung der Funktionalgleichung

$$B[\psi] = \Psi, \tag{20}$$

unter Ψ eine gegebene Mengenfunktion der Klasse $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$, unter ψ eine zu Ψ bestimmende Mengenfunktion der Klasse $L_q(b)$ verstanden.

In Anlehnung an *F. Rieß* wird eine für die Lösbarkeit notwendige und hinreichende Bedingung gegeben. Hieran schließt eine Kette weiterer wichtiger Betrachtungen, insbesondere über "normale" Bilinearoperationen ($q = \frac{p}{p-1}$, $a = b$), "*Fredholm*sche Transformationen" usw.

Der letzte, achte Abschnitt bringt einige Anwendungen. Sei φ_1 $i = 1, 2, \dots)$ eine Folge von Mengenfunktionen der Klasse $L_p(a)$. In Verallgemeinerung eines Satzes von *F. Rieß* wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit der unendlich vielen Gleichungen

$$\int_I \frac{d\varphi_k d\psi}{da} = a_k, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

unter a_i $(i = 1, 2, \dots)$ eine beliebige gegebene Wertfolge, unter ψ eine zu bestimmende Funktion der Klasse $L_{\frac{p}{p-1}}(a)$ verstanden, abgeleitet. Unter zahlreichen anderen Ergebnissen sei ein weitreichendes Kriterium für die Gültigkeit der *Fredholm*schen Fundamentalsätze hervorgehoben.

Reviewer: Lichtenstein, Prof. (Charlottenburg)