

Sommerfeld, A.

Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung., (German) JFM 43.0819.01
Deutsche Math.-Ver. 21, 309-353 (1912).

Vorgelegt sei ein beliebiges räumliches Gebiet S mit der Oberfläche σ , das als endlich und einfach zusammenhängend vorausgesetzt wird. In ihm soll die Schwingungsgleichung (1) $\Delta u + k^2 u = 0$ so integriert werden, daß die Oberflächenbedingung $u = 0$ auf σ erfüllt ist. Die Konstante ist proportional der Frequenz der Schwingungen. Entsprechend der Theorie der freien Schwingungen, wie sie unter anderem von *Pockels* behandelt ist, hat der Verf. in einer Vorlesung über die partiellen Differentialgleichungen auch die Theorie der erzwungenen Schwingungen in gleicher Allgemeinheit behandelt. Es genügt dabei, als einfachste Art der Anregung eine im Innern von S gelegene Einheitsquelle anzunehmen. O sei der Quellpunkt, P der Aufpunkt, in dem der Schwingungszustand zu berechnen ist.

Die entstehende Verteilung der Schwingungsamplituden werde als *Greensche Funktion* mit G_{OP} bezeichnet. Die Schwingungsfrequenz und der zugehörige Wert von k sei beliebig gegeben, doch so, daß er mit keinem der Eigenwerte k_m übereinstimmt. Auf die *Greensche Funktion* (punktförmige Anregung) läßt sich jede andere Art der Anregung (räumliche oder flächenhafte Verteilung von Quellpunkten) zurückführen.

Es zeigt sich nun, daß die Theorie der erzwungenen Schwingungen keine neuen mathematischen Schwierigkeiten macht, nachdem für das fragliche Gebiet S das Problem für die freien Schwingungen gelöst ist. Man kann nämlich den Ausdruck der *Greenschen Funktion* allgemein und überaus durchsichtig aus den Eigenfunktionen des Gebiets wie folgt aufbauen:

$$G_{OP} = \sum \frac{u_m(O) u_m(P)}{k^2 - k_m^2}, \quad (6)$$

die Summation erstreckt über das vollständige System der Eigenwerte. Diese Zurückführung der erzwungenen Schwingungen auf die freien des Gebiets läßt sich bezeichnen als eine Art funktionentheoretischer Spektralanalyse. Die Formel (6) bringt die charakteristischen Eigenschaften der *Greenschen Funktion* zum unmittelbaren Ausdruck.

Schlußbemerkung. "Während in dem ersten Teile dieser Arbeit das mehr konventionelle mathematische Problem der Randwertaufgaben für das Innere eines endlichen Gebietes behandelt wurde, bildete den Gegenstand des zweiten Teiles das eigentliche physikalische Schwingungsproblem für ein unendlich ausgedehntes Gebiet mit eventuell vorhandenen inneren Grenzen. Während der erste Teil auf einem bequemen, aber nur als heuristisch zu bezeichnenden Wege zu bekannten (und anderwärts viel strenger bewiesenen) Resultaten führte, wird in diesem zweiten Teile eine besondere Klasse von neuen und, wie es scheint, mathematisch interessanten Problemen aufgestellt und wird gezeigt, daß dieselben durch die im Unendlichen vorzuschreibende Ausstrahlungsbedingung eindeutig bestimmt wird."

Der erste Teil der Abhandlung ("Endliches Gebiet") bildete den Gegenstand eines Vortrages auf der Naturforscherversammlung in Königsberg (F. d. M. 41, 867 (JFM 41.0867.*), 1910); der zweite ("Unendliches Gebiet") ist die erweiterte Wiedergabe eines auf der Naturforscherversammlung in Münster gehaltenen Vortrages (1912).

Reviewer: Lampe, Prof. (Berlin)

Cited in **37** Documents

Full Text: [EuDML](#)