Perron, O.
Über lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten. (German) JFM 42.0329.02
Acta Math. 34, 139-163 (1911).

H. v. Koch (C. R. 116, 91 u. 365, 1893; Acta Math. 18, 1894) hat für eine homogene lineare Differentialgleichung, in welcher der Koeffizient der zweithöchsten Ableitung verschwindet, mit Hülfe unendlicher Determinanten die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz von Partikularintegralen aufgestellt, die sich an einer Unbestimmtheitsstelle bestimmt verhalten. Verf. behandelt in der vorliegenden Arbeit auf einem neuen, einfacheren Wege lineare Differentialgleichungen, deren Koeffizienten speziell rationale Funktionen sind, von denen aber keine identisch zu verschwinden braucht. Dabei bedient er sich zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten der Integrale von der Form $(xa)^\varrho \sum_{\nu=0}^\infty D_\nu(x-a)^\nu$ nicht unendlicher Determinanten, sondern derjenigen Resultate, die er in einer vorhergehenden Arbeit über lineare Differenzengleichungen (Acta Math. 34, 109-137; vgl. das Referat in Kap. VI, 5B) gewonnen hat. Die vorgelegte Differentialgleichung hat (nach Verlegung der Stelle a in den Nullpunkt) die "Normalform":

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^m x^i(c_{i_0}+c_{i_1}+\cdots+c_{i_r}x^r)\frac{d^iy}{dx^i}=0.$$

Die Theoreme I bis IV geben die notwendige und hinrechende Bedingung dafür, daß die Differentialgleichung (1) genau s linear unabhängige Integrale der Form $y=x^\varrho P(x)$ hat, wo ϱ eine Wurzel der determinierenden Gleichung ist und $P(x)$ eine in der Umgebung des Nullpunktes konvergente Potenzreihe oder eine ganze Funktion bedeutet, in der Gestalt an, daß eine gewisse Matrix vom Rang $N+r-s$ (N eine passend gewählte Zahl) ist; soll $P(x)$ ein Polynom sein, so muß eine gewisse Martix vom Range $N-x$ sein. Die Theoreme V u. VI beziehen sich auf den μ-Index (Terminologie von *VivantiGutzmer*, Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen, Leipzig 1906, S. 229) der ganzen transzendenten Funktionen, die einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten genügen; insbesondere sei hervorgehöben, daß die Summe ihrer μ-Indizes höchstens gleich der Ordnung dieser Differentialgleichung ist. Theorem VII lautet: "Sind die Koeffizienten einer homogenen linearen Differentialgleichung $m$ter Ordnung Polynome, so sind in einer s-fachen Nullstelle der Koeffizienten der höchsten Ableitung mindestens $m-s$ Integrale analytisch." Theorem VIII u. IX: Sind die Koeffizienten einer homogenen linearen Differentialgleichung m-ter Ordnung Polynome, und ist der Koeffizient der höchsten Ableitung vom s-ten Grade, so sind mindestens $m-s$ Integral ganze Funktionen, deren μ-Index mindestens gleich 1 ist, falls die übrigen Koeffizienten höchstens vom s-ten Grade sind.

Reviewer: Wallenberg, Prof. (Berlin)

Full Text: DOI

References:

[1] Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik, Bde 74 ff.
[2] Sur les intégrales régulières des équations différentielles linéaires. Acta mathematica, 18(1894). Siehe auch zwei Noten in den Comptes rendus, 116 (1893) pag. 91 und 365.
[3] Seite 109 dieses Bandes.
[4] Wie HerrThomé l. c. Bd. 74 gezeigt hat, kann es überhaupt immer höchstens so viele sich bestimmt verhaltende Integrale, also a fortiori höchstens so viele Integrale der Form (6) geben, als der Grad des Polynomsf o() beträgt.
[5] Mathematische Annalen, Bd. 66.
[6] Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen, Leigzig 1906, pag. 229.
[7] Offenbar istq {\(\lambda\)}=0 füre<{\(\epsilon\)}; dagegenq {\(\lambda\)}>0 füre={\(\epsilon\)}.

paper as accurately as possible without claiming the completeness or perfect precision of the matching.