Birkhoff, G. D.
General theory of linear difference equations. (English) JFM 42.0359.02
Trans. Am. Math. Soc. 12, 243-284 (1911).

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist erstens, die Natur der Lösungen einer linearen Differenzengleichung mit rationalen Koeffizienten durch direkte Methoden zu untersuchen, und zweitens, zu zeigen, daß auch für lineare Differenzengleichungen eine *Riemann*sche Theorie existiert; insbesondere ergibt sich, daß hier gewisse rationale Funktionen von $e^{2\pi ix}$ dieselbe Rolle spielen wie die Konstanten der Monodromiegruppe einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung.

Wegen der großen Einfachheit der Matrixbezeichnung betrachtet Verf. anstatt einer einzelnen Gleichung n-ter Ordnung ein System von n linearen Differenzengliechungen erster Ordnung

$$(1) \quad g_i(x+1)=\sum_{j=1}^n a_{ij}(x)g_j(x) \quad (i=1,2,\dots,n).$$

In diesen Gleichungen sind die Koeffizienten $a_{ij}(x)$ rationale Funktionen von x mit einem Pol höchstens μ-ter Ordnung in $x=\infty$, also

$$(2) \quad a_{ij}(x)=a_{ij}x^\mu+a_{ij}^{(1)}x^{\mu 1}+\cdots \quad (|x|>R);$$

ferner wird – cum grano salis – vorausgesetzt, daß die n Wurzeln der "charakteristischen Gleichung"

$$(3) \quad |a_{ij}\delta_{ij}\varrho_j|=0 \quad (i,j=1,2,\dots,n;\delta_{ij}=0,\text{ wenn } i\neq j;\delta_{ii}=1)$$

voneinander und von Null verschieden sind. Wenn die n Funktionssysteme $g_{11}(x),\dots,g_{n1}(x)$;...; $g_{1n}(x),\dots,g_{nn}(x)$ n linear unabhängige Lösungen von (1) sind, so bildet das System der Elemente $g_{ij}(x)$ eine "Matrixlösung" $G(x)$. Das System der Elemente $a_{ij}(x)$ bildet eine zweite Matrix $A(x)$, und die n^2 Gleichungen, denen die n Lösungen genügen, können in eine einzige Matrixgleichung

$$(4) \quad G(x+1)=A(x)G(x)$$

zusammengefaßt werden; wird x durch $x-1$ ersetzt, so kann diese folgendermaßen geschrieben werden:

$$(4)' \quad G(x-1)=A^{-1}(x-1)G(x).$$

Die allgemeinste Matrixlösung von (4) lautet:

$$(5) \quad H(x)=G(x)P(x),$$

wo $G(x)$ eine Partikularlösung und $P(x)$ eine beliebige Matrix periodischer Funktionen von der Periode 1 ist, deren Determinante nicht identisch verschwindet.

Die Gleichung (4) besitzt die beiden symbolischen Lösungen

$$\begin{cases} G(x)=A(x-1)A(x-2)\dots, \\ G(x)=A^{-1}(x)A^{-1}(x+1)\dots, \end{cases}$$

welche aber nur in besonderen Fällen gegen Grenzmatrizen konvergieren. Die Konvergenz wird in hinreichender Allgemeinheit durch folgende in §1 ausgeführte Modifikation gesichert:

Das System (1) wird bekanntlich formal durch gewisse für $g_1(x),g_2(x),\dots,g_n(x)$ eingesetzte formale Reihen befriedigt, und zwar entspricht jeder der n Wurzeln der charakteristischen Gleichung (3) ein solches Lösungssystem. Die aus diesen in einer gewissen Reihenfolge genommenen Systemen gebildete Matrix wird mit $S(x)$ bezeichnet, diejenige Matrix, die daraus hervorgeht, indem man alle Elemente bei dem k-ten Gliede abbricht, mit $T(x)$. Die Matrizenfolgen

$$\begin{matrix} A(x-1)A(x-2)\cdots A(x-m)T(x-m), \\ A^{-1}(x)A^{-1}(x+1)\cdots A^{-1}(x+m-1)T(x+m) \end{matrix} \quad (m=1,2,\dots)$$

bilden die gewünschte Modifikation der beiden symbolischen Lösungen. Es wird bewiesen, daß alle aus den λ ersten Kolonnen und irgendwelchen λ Zeilen der ersten dieser Matrizen ($\lambda = 1, 2, \dots, n$) oder aus den λ letzten Kolonnen und λ Zeilen der zweiten Matrix gebildeten Determinanten gegen Grenzfunktionen konvergieren, die von k unabhängig sind, wenn m unendlich wird. Mittels dieser Funktionen und eines Summationsprozesses, der auf einem von *Carmichael* (Referat vorstehend) benutzten Konturenintegral basiert, werden zwei bemerkenswerte partikulare Matrixlösungen $G(x)$ und $H(x)$ gewonnen (§§2,3,4); diese werden "die erste und zweite Hauptmatrixlösung" genannt. Die Elemente von $G(x)$ sind analytisch bis auf Pole in den Punkten $\sigma+1, \sigma+2, \dots$, wenn σ ein Pol eines der Elemente von $A(x)$ ist, und besitzen die asymptotische Form der entsprechenden Elemente von $S(x)$ in einer linken Halbebene. Die Elemente von $H(x)$ sind analytisch bis auf Pole in den Punkten $\sigma-1, \sigma-2, \dots$, wenn σ ein Pol eines der Elemente von $A^{-1}(x-1)$ ist, und besitzen in einer rechten Halbebene die asymptotische Form der entsprechenden Elemente von $S(x)$. Die Hauptmatrixlösungen $G(x)$ und $H(x)$ sind durch diese asymptotische Eigenschaft eindeutig bestimmt; zwischen ihnen besteht eine Relation von der Form (5). Wenn umgekehrt $G(x)$ und $H(x)$ durch die Elemente einer Matrix $S(x)$ bis zu den Gliedern erster Ordnung asymptotisch dargestellt werden und durch eine Relation (5) miteinander verbunden sind, so bilden sie die erste und zweite Hauptmatrixlösung eines Systems (4), in welchem die Elemente von $A(x)$ rational sind (§7). In §5 wird bewiesen, daß die Elemente von $P(x)$ rationale Funktionen von $e^{2\pi ix}$ sind; die Struktur dieser Funktionen wird für den besonderen Fall, auf den sich der allgemeinere zurückführen läßt, bestimmt, daß die Funktionen $a_{ij}(x)$ Polynome vom Grade μ sind. Diese Ergebnisse führen in §6 zur Bestimmung der Natur der Elemente von $G(x)$ und $H(x)$ in der übrigbleibenden rechten, bzw. linken Halbebene; es zeigt, sich, daß die asymptotische Form dort längs gewisser "kritischer Strahlen" alteriert wird. So ergibt sich eine vollständige Beschreibung des Verhaltens der Hautpmatrixlösungen. In §7 wird gezeigt, daß die Zahl der "charakteristischen Konstanten", die in der vollständigen Charakterisierung der Matrizen $G(x)$ und $H(x)$ und ihrer Verknüpfung mittels $P(x)$ enthalten sind, genau gleich der Zahl der willkürlichen Konstanten in den als Polynome angenommenen Koeffizienten $a_{ij}(x)$ ist, und daß die charakteristischen Konstanten voneinander unabhängig sind. So gelangt Verf. zur Aufstellung des folgenden Hauptproblems der Theorie der linearen Differenzengleichungen: zu ermitteln, ob ein System linearer Differenzengleichungen mit vorgeschriebenen charakteristischen Konstanten existiert. Die in der vorliegenden Arbeit enthaltene Methode ist von großer Allgemeinheit und läßt sich auch anwenden, wenn die Koeffizienten $a_{ij}(x)$ in $x=\infty$ nur den Charakter rationaler Funktionen besitzen (vgl. d. Referat über die Arbeit von *Carmichael* S. 359).

Reviewer: Wallenberg, Prof. (Berlin)

MSC:

39A05 General theory of difference equations

Full Text: DOI