Schur, I.

Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen. (German) JFM 42.0367.01

J. für Math. 140, 1-28 (1911).

Aus der Fülle der Resultate und Methoden, die der Praktiker der unendlichvielen Veränderlichen aus dieser Arbeit zu lernen hat, kann hier nur einiges wenige hervorgehoben werden.

1. Sind für eine Bilinearform $\sum a_{pq}x_py_q$ die Summen $\sum_\alpha |a_{p\alpha}|$ und $\sum_\beta |a_{\beta q}|$ konvergent und unter einer von p, q unabhängigen Schranke gelegen, so ist die Form "absolut beschränkt", d. h. sie ist nicht nur selbst (in Sinne von *Hilbert*) beschränkt, sondern mit ihr auch $\sum |a_{pq}|x_py_q$.

2. Sind $\sum a_{pq}x_py_q$ und $\sum b_{pq}x_py_q$ beschränkte Bilinearformen, so ist die Bilinearform $\sum a_{pq}b_{pq}x_py_q$ absolut beschränkt.

3. Ist $\sum a_{pq}x_py_q$ beschränkt, $|a_{pq}| \leqq a$, und bedeutet $f(x) = c_1x + c_2x^2 + \cdots$ eine für $x = a$ absolut konvergente Potenzreihe, so ist auch $\sum f(a_{pq})x_py_q$ beschränkt. Z. B. also

$$\sum_{p,q} \frac{a_{pq}}{\xi - a_{pq}} x_py_q \text{ und } \sum_{p,q} \lg\left(\frac{\xi}{\xi - a_{pq}}\right) x_py_q$$

beschränkt, sobald $|\xi|$ die obere Grenzen der Zahlen $|a_{pq}|$ übertrifft.

4. Ist $\sum h_{pq}x_py_q$ eine definite *Hermite*sche Form, d. h. h_{qp} konjugiert imaginär zu h_{pq} und $\sum_{p,q=1}^n h_{pq}x_p\overline{x}_p \geqq 0$ für $n = 1, 2, \ldots$, ist ferner h_{pp} unter einer von p unabhängigen Schranke gelegen, und ist $\sum a_{pq}x_py_q$ irgendeine beschränkte Form, so ist stets auch $\sum h_{pq}a_{pq}x_py_q$ beschränkt.

5. Sind $\sum a_{pq}x_p\overline{x}_p$ und $\sum b_{pq}x_p\overline{x}_q$ zwei definite *Hermite*sche Formen, so ist auch $\sum a_{pq}b_{pq}x_p\overline{x}_q$ eine definite *Hermite*sche Form. Dies wird für Formen von n Veränderlichen besprochen und danach auf Integralgleichungen übertragen: Sind $K_1(s, t), K_2(s, t)$ zwei symmetrische Kerne mit lautet positiven Eigenwerten, so auch der Kern $K_1(s, t) \ldots K_2(s, t)$.

6. Es wird ein neuer Beweis für den gelegentlich von *Hilbert* bewiesenen Satz gegeben, daß

$$\sum_{p \neq q} \frac{x_py_q}{p - q}, \sum \frac{x_py_q}{p + q}$$

beschränkte Formen sind; es ergibt sich zugleich π als genaue obere Grenze der zweiten dieser beiden Formen, während der *Hilbert*sche Beweis nur die Schranke 2π liefert, eine Bemerkung, die für die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie und ihre Behandlung durch Integralgleichungen im Falle eines Bereiches mit einer Ecke wesentlich sein dürfte.

7. Es wird zum erstenmal ein Beispiel einer *reellen, quadratischen* Form gegeben, die beschränkt ist, ohne absolut beschränkt zu sein, und im Zusammenhang hiermit ein elementarer Beweis dafür, daß

$$\left|\frac{\sin t}{1} + \frac{\sin 2t}{2} + \cdots + \frac{\sin nt}{n}\right|$$

für reelle t unter einer von n unabhängigen Schranke liegt, und zwar wird die von *Fejér* angegebene Schranke $\frac{\pi}{2} + 1 = 2,570\ldots$ zu $2,389\cdots = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}$ verbessert, so daß die wahre Grenze nunmehr das Intervall von $\frac{2}{\pi}$ bis $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}$ eingeschränkt ist.

Endlich werden die bei Nr. 6, 7 verwendeten Methoden auf allgemeine Klassen von Bilinearformen ausgedehnt.

Reviewer: Toeplitz, Prof. (Kiel)

Full Text: DOI Crelle EuDML