Hecke, E.
Höhere Modulfunktionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie. (German)
JFM 42.0457.01
Math. Ann. 71, 1-37 (1912).

Nachdem *Blumenthal*, von *Hilbert* angeregt, Modulfunktionen von n Veränderlichen nach der funktionentheoretischen Seite hin bearbeitet und eine Reihe bemerkenswerter Ergebnisse gewonnen hatte (F. d. M. 34, 466-468, 1903; 35, 432-433, 1904), unternimmt es der Verf., diese Untersuchungen weiterzuführen und für die Zahlentheorie nutzbar zu machen. Wie er bemerkt, tritt das Prinzip, von zahlentheoretischen Gesichtspunkten aus zu neuen Funktionen zu gelangen, vereinzelt schon früher in der Literatur auf. So findet sich in *Dirichlets* klassischer Abhandlung über die Bestimmung der Klassenzahl quadratischer Formen eine Digression über gewisse Reihen, die im Falle einer negativen Determinante auf bekannte Formeln aus der Lehre von den elliptischen Funktionen führen, im Falle einer positiven Determinante aber neue Funktionen definieren; dieselben Reihen treten auch bei H. *Weber* auf (F. d. M. 25, 787, 1893), ohne jedoch genauer untersucht zu werden. Dann aber hat *Fricke* in einer Reihe von Arbeiten automorphe Funktionen einer Veränderlichen betrachtet, bei denen die Koeffizienten der linearen Transformationen aus den ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers gewonnen werden, und hat deren Theorie so weit gefördert, daß ihr Zusammenhang mit einer besonderen Klasse quadratischer Formen hervortritt. Von funktionentheoretischer Seite her ist besonders *Humbert* zu den *Hilbert*schen Modulfunktionen von zwei Veränderlichen gekommen (F. d. M. 30, 408, 1899; 31, 455, 1900; 32, 456, 1901; 34, 243, 244, 1903; 35, 230, 1904; 37, 466, 1906). Wenn man die Theorie der Transformation der hyperelliptischen Funktionen von zwei Veränderlichen nach dem Vorbilde der elliptischen Funktionen auszubauen sucht, so müssen diejenigen Systeme von Thetamoduln untersucht werden, die neben den gewöhnlichen *Hermite*schen Transformationen noch andere gestatten, und die, wie *Humbert* gezeigt hat, dadurch gekennzeichnet sind, daß sie mindestens eine *Hermite*sche Transformation in sich besitzen. Die allgemeinsten Thetafunktionen dieser Art führen unmittelbar zu den *Hilbert*schen Modulfunktionen; als besondere Fälle davon, bei denen zwei solche Transformationen in sich vorhanden sind, erscheinen dann die Funktionen einer Veränderlichen, die *Fricke* betrachtet hat. Die Sätze von *Humbert* sind von dem Verf. der vorliegenden Göttinger Dissertation in ausgedehntem Maße benutzt worden.

In dem ersten Kapitel wird zunächst auseinandergesetzt, wie sich die *Hilbert*schen Modulfunktionen für zwei Veränderliche aus den Perioden ergeben, die beim hyperelliptischen Gebilde vom Geschlechte zwei auftreten, und darauf wird die Theorie der zugehörigen Transformations- und Multiplikatorgleichungen entwickelt. Das zweite Kapitel ist zahlentheoretischen Inhalts. Es sei $k(\sqrt{D})$ ein reeller quadratischer Körper und K ein relativ-quadratischer Körper, der durch Adjunktion von $\sqrt{\triangle}$ erzeugt werde; K sei total imaginär. Dann werden die Beziehungen aufgestellt, die zwischen den Klassen äquivalenter Zahlen und gewissen Idealklassen in K bestehen, analog, wie das für den absolutquadratischen Körper der Fall ist. Es folgen die Untersuchungen der Transformationen der Zahlen des Relativkörpers in sich, und den Schluß bildet die Ermittlung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß zwei Zahlen ξ und ξ', welche Wurzeln in $k(\sqrt{D})$ liegender quadratischer Gleichungen mit konjugierten Koeffizienten sind, ein singuläres Wertsystem im Sinne von *Humbert* bilden. Im dritten Kapitel werden die Modulfunktionen für solche Argumente ξ, ξ', untersucht. Das Hauptergebnis läßt sich folgendermaßen aussprechen. Gegeben sei ein reeller quadratischer Körper $k(\sqrt{D})$. Es sei $\triangle$ eine total negative Zahl in ihm von der Art, daß die Zahl $\sqrt{\triangle}$ mit ihrer konjugierten $\sqrt{\triangle'}$ einen *Galois*schen Körper vom Grade acht definiert. Ferner bezeichne ξ eine Zahl mit positivem imaginaren Teil in $K(\sqrt{\triangle})$, deren Primitivdiskriminante gleich der Relativdiskriminante von $K(\sqrt{\triangle})$ in bezug auf $k(\sqrt{D})$ ist, und ξ', die Konjugierte in $K(\sqrt{\triangle'})$ mit negativ imaginärem Teile. Bildet man die Modulfunktion F der zum Körper $k(\sqrt{D})$ gehörigen Modulgruppe und setzt als Argumente die Zahlen ξ, ξ' ein, so erhält man als Wert von F eine algebraische Zahl u, die einer algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten vom Grade $2h'$ genügt; h' ist die Anzahl derjenigen Idealklassen in $K(\sqrt{\triangle})$, deren Relativnorm in $k(\sqrt{\triangle})$, der engeren Hauptklasse angehört. Nach Adjunktion von $\sqrt{\triangle\triangle'}$ zerfällt diese Gleichung in zwei Gleichungen vom Grade h'. Nach Adjunktion von $\sqrt{\triangle} + \sqrt{\triangle'}$ für die eine, von $\sqrt{\triangle} - \sqrt{\triangle'}$ für die andere dieser beiden Gleichungen werden beide zu *Abel*schen Gleichungen. Ihre Gruppe ist als Untergruppe enthalten in der Gruppe der Idealklassen von $K(\sqrt{\triangle})$, deren Relativnorm in $k(\sqrt{D})$ der Hauptklasse in engerem Sinne angehört. Die Untersuchung der so erhaltenen Körper $K(u)$ soll die Aufgabe einer weiteren Abhandlung sein.

Reviewer: Stäckel, Prof. (Heidelberg)

Full Text: DOI Link EuDML

References:

[1] Diese Arbeit ist ein Abdruck meiner Dissertation, Göttingen 1910.

[2] Göttinger Nachrichten 1900. Problem 12.

[3] Crelles Journal Bd. 130 u. 132. Einige Lücken in dem Beweise wird Herr Fueter in einem demnächst bei Teubner erscheinenden Buche über die komplexe Multiplikation ausfüllen.

[4] Mathematische Annalen Bd. 56 u. 58. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 13.

[5] Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 13. · Zbl 35.0071.12

[6] Crelles Journal Bd. 21. Dirichlet-Dedekind, Zahlentheorie, auch Brief an Kronecker vom 13. Juli 1858.

[7] Göttinger Nachrichten 1893.

[8] Crelles Journal Bd. 27, S. 190-191.

[9] Mathematische Annalen Bd. 38, 39, 41, 42.

[10] Journal de Lionville, Série 4, T. 1.

[11] Journal de Lionville, Série 5, T. 5, 6, 7, 9, 10; Série 6, T. 2.

[12] Bezüglich der folgenden Sätze und der Transformationsformeln vgl. Burkhardt, Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Funktionen 1. Ordnung. Math. Ann. Bd. 35.

[13] Math. Ann. Bd. 30.

[14] Clebsch, Über die Transformierbarkeit usw. Math. Ann. Bd. 2.

[15] Blumenthal, Jahresbericht l. c. Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 13.

[16] Math. Ann. Bd. 56 und 58.

[17] Vergl. Blumenthal, Math. Ann. Bd. 58, S. 525 ff.

[18] Bolza, Math. Ann. Bd. 30.

[19] Hurwitz, Die unimodularen Substitutionen eines algebraischen Zahlkörpers, Göttinger Nachrichten 1895. · Zbl 26.0109.01

[20] Vgl. H. Weber, Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen. 2. Aufl.

[21] Bezüglich der Relativbasis vgl. A. Speiser, Die Theorie der binären quadratischen Formen mit Koeffizienten und Unbestimmten in einem beliebigen Zahlkörper, Dissertation Göttingen 1909, {\S} 2.

[22] Vgl. A. Speiser, Die Theorie der binären quadratischen Formen mit Koeffizienten und Unbestimmten in einem beliebigen Zahlkörper, Dissertation Göttingen 1909, {\S} 2. l. c, S. 3.

[23] Vgl. H. Weber, Lehrbuch d. Algebra. II. 2. Aufl. {\S} 31. Dort Findet sich übrigens ein Versehen bezüglich der Anzahl der Untergruppen 4. Grades, welche dort zu 1 angegeben ist.

[24] Hilbert, Relativquadr. Zahlkörper, Math. Ann. Bd. 51.

[25] Furtwängler, Existenzbeweis f. d. Klassenkörper, Math. Ann. Bd. 63. · Zbl 37.0243.02

[26] Weber, Über Zahlengruppen in algebraischen Zahlkörpern, Math. Ann. Bd. 49. · Zbl 28.0188.09