Plemelj, J.

Potentialtheoretische Untersuchungen. (German) JFM 42.0828.10

Preisschr. Jablonowskische Ges. 40, Nr. 16, XIX u. 100 S. (1911).

Die vorliegende Schrift ist durch die von der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft für das Jahr 1910 gestellte Aufgabe veranlaßt, in der eine Arbeit gefordert wurde, durch welche die Theorie der Grundbelegung (betreffs dieses Begriffs vgl. F. d. M. 37, 785, 1906) in bezug auf Klarheit und Strenge oder in bezug auf Umfang und Vollständigkeit wesentlich gefördert werde. "Da bei Problemstellungen, die gewissermaßen den Schlußstein einer Theorie bilden, ausgedehnte Hülfsmittel zur Lösung herangezogen werden müssen, erschien es dem Verf. nötig, den ganzen Lehrgang der Potentialtheorie durchzugehen, um schon in den Fundamenten einige Ergänzungen hinzuzufügen, die gewissen Theoremen eine Allgemeinheit verschaffen, wodurch sie erst bei Behandlung so subtiler Fragen anwendbar werden. Wenn so meine Arbeit gleichsam den Charakter eines systematischen Aufbaues der Potentialtheorie erhalten hat, so wird man hoffentlich selbst in den Grundlagen der Potentialtheorie die Darstellung nicht als eine einfache Wiedergabe längst bekannter Darstellungsmethoden finden. Es mußte mir daran gelegen sein, nur das wirklich Nötige zu präzisieren und erforderlichenfalls zu ergänzen, hingegen alles nicht Nötige und deshalb Hemmende zu vermeiden."

Die Arbeit zerfällt in vier Abschnitte, deren erster die Grundlagen der Potentialtheorie entwickelt. Hier wird vor allem eine neue Definition des regulären Verhaltens des Potentials im Unendlichen gegeben, die für beide Potentialarten, das logarithmische und das *Newton*sche, völlige Gleichartigkeit erzielt und dem Unendlichen ganz den exzeptionellen Charakter nimmt. Es ist folgende: Ein Potential $U(p)$ heißt dann und nur dann im Unendlichen regulär, wenn $U(p)$ bei unbegrenzt wachsender Distanz R vom Ursprung des Koordinatensystems gegen einen bestimmten konstanten Wert c konvergiert, während die Ableitung von $U(p)$ in irgendeiner Richtung x einen solchen Kleinheitsgrad hat, daß

$$\lim_{R=\infty} R\frac{\partial U}{\partial x}=0 \quad \text{beim logarithmischen,}$$

$$\lim_{R=\infty} R^2\frac{\partial U}{\partial x}=0 \quad \text{beim } \textit{Newton}\text{schen}$$

Potential sich ergibt. Wenn für alle hinreichend großen R ein Potential $V(p)$ das Verhalten zeigt:

$$V(p)=m\log\frac{1}{R}+U(p) \quad \text{beim logarithmischen,}$$

$$V(p)=m\cdot\frac{1}{R}+U(p) \quad \text{beim } \textit{Newton}\text{schen}$$

Potential, wobei $U(p)$ eine im Unendlichen reguläre Potentialfunktion bedeutet, so heißt m die Gesamtmasse von $V(p)$. Für im Unendlichen reguläre Potentiale ist also die Gesamtmasse gleich Null.

Ferner wird die Schwierigkeit, die die Existenz oder Nichtexistenz der normalen Ableitungen macht, dadurch umgangen, daß statt der normalen Ableitungen am Rande ein neuer Begriff eingeführt wird, nämlich das auf ein Stück der Berandung erstreckte Integral $\int \frac{dU}{dn}ds$. Diese Größe, die sich ohne Verwendung der Randwerte der Ableitungen rein durch das Verhalten im Regularitätsgebiet definieren läßt, wird "Strom" oder "Strömung" genannt. Sie ist beim logarithmischen Potential die Änderung des konjugierten Potentials zwischen den Endpunkten des Kurvenstücks.

Wichtig ist auch, daß, um die Massenverteilung in der Berandung nicht als differenzierbar voraussetzen zu müssen, der Begriff der Dichtigkeit ausgeschaltet, für das Potential einer einfachen Schicht also der Ausdruck

$$V(p)=\int\log\frac{1}{r_{ps}}\cdot d\mu_s$$

wird. Nur durch diese neue Form von $V(p)$ gelingt es später, ein Potential mit gegebenen Randwerten in der Form eines einfachen Potentials darzustellen.

Der *zweite* Abschnitt enthält die wichtigsten Sätze aus der Theorie der *Fredholm*schen Integralgleichungen. Die Beweise sind stellenweise von einer etwas einfacheren Form als bei *Fredholm*.

Im *dritten* Abschnitt werden die beiden Randwertaufgaben behandelt. Hier wird zunächst gezeigt, daß das Eindeutigkeitstheorem auch für stückweise stetige Randwerte bestehen bleibt, daß es ferner auch bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen gilt, wenn es auf konstante Unterschiede am Rande nicht ankommt. Bei der Lösung der Randwertaufgaben wird die durch einen Parameter λ verallgemeinerte *Poincaré*sche Problemstellung zugrunde gelegt, und es wird sowohl das *Neumannsche*, als das *Robin*sche Problem auf je eine Integralgleichung und zugleich das letztere auf das erstere zurückgeführt. Für das Moment $\nu(s)$ des Potentials W einer Doppelbelegung, das die erste Randwertaufgabe bei gegebener Randfunktion $f(\sigma)$ löst, ergibt sich die Form

$$\nu(s) = f(s) - \lambda \int f(\sigma)\, H(\sigma, s)\, d\sigma,$$

worin $H(\sigma, s)$ eine einzig vom Parameter λ und der Form des vorausgesetzten Gebietes abhängige Funktion zweier Punkte σ, s des Randes ist, die aus einer der beiden Integralgleichungen

$$H(\sigma, s) + \lambda \int h(\sigma, \vartheta)\, H(\vartheta, s)\, d\vartheta = h(\sigma, s),$$

$$H(\sigma, s) + \lambda \int H(\sigma, \vartheta)\, h(\vartheta, s)\, d\vartheta = h(\sigma, s)$$

zu bestimmen ist; dabei ist

$$h(\sigma, s) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dn_\sigma} \log \frac{1}{r_{\sigma s}} = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\sigma} \left(\text{arc tg} \frac{y_\sigma - y_s}{x_\sigma - x_s} \right).$$

Die *Fredholm*sche Lösung gibt $H(\sigma, s)$ als Quotienten zweier ganzen, im allgemeinen transzendenten Funktionen von λ. Hinsichtlich der singulären Parameterwerte λ (für die der Nenner von $H(\sigma, s)$ verschwindet) wird neben dem *Poincaré*schen Satze, daß die singulären Parameter alle reell, absolut genommen, nicht kleiner als 1 sind und sich im Unendlichen häufen können, noch der weitere abgeleitet, daß jene Parameter einfache Pole der Funktion $H(\sigma, s)$ sind. Von den absolut kleinsten der singulären Parameter, nämlich $\lambda = \pm 1$ ist nur $\lambda = -1$ singulär. Es zeigt sich, daß an der Stelle $\lambda = -1$, wo $H(\sigma, s)$ die Form hat:

$$H(\sigma, s) = \frac{\mathfrak{m}'(\sigma)}{\lambda + 1} + \mathfrak{H}(\sigma, s),$$

das Residuum $\mathfrak{m}'(\sigma)$ genau die Massendichte der natürlichen Belegung (betreffs der Definition vgl. F. d. M. 41, 858, 1910) ist, während die endlich bleibende Funktion $\mathfrak{H}(\sigma, s)$, an Stelle von $H(\sigma, s)$ in $\nu(s)$ eingesetzt, ein Potential W ergibt, welches am Rande die gegebenen Werte $f(s)$ nur bis auf einen additiven konstanten Unterschied, die *Neumann*sche Konstante, liefert. Im Falle mehrfach zusammenhängender Bereiche ergeben sich aus dem Residuum genau ebensoviel natürliche Belegungen, als getrennte Randstücke vorhanden sind. Die Potentiale der natürlichen Belegungen dieser Randstücke, Leiterpotentiale genannt, geben ein Mittel, die Randwertaufgabe *genau* zu lösen, nicht nur bis auf je einen konstanten Unterschied auf jedem geschlossenen Stück. - Nachdem noch die Funktionen $\mathfrak{H}(\sigma, s)$ und $\nu(s)$ in Reihenform dargestellt sind, werden die Resultate auf Kreis und Ellipse angewandt.

Bei der besprochenen Lösung der Randwertaufgaben ist durchweg das logarithmische Potential zugrunde gelegt. Es läßt sich aber zeigen (§ 29), daß die hierfür abgeleiteten Sätze ausnahmslos auch beim *Newton*schen Potential richtig sind.

Waren die meisten Sätze des dritten Abschnitts nicht wesentlich neu, sondern nur ihre Ableitung, die sich erheblich einfacher gestaltet als nach den bisherigen Methoden, so sind die Ergebnisse des *vierten* Abschnitts sowohl inhaltlich, als methodisch neu. Dieser vierte Abschnitt betrifft die Zusammenhänge zwischen den Lösungen für das Innen- und für das Außengebiet. Ein einfacher Ausdruck ergibt sich dadurch, daß es möglich ist, das irgendwelchen gegebenen Randwerten $f(s)$ entsprechende Potential sowohl für das Außen-, wie für das Innengebiet in der Form darzustellen: $U(p) = \int \{\cdots\} f(\sigma) d\sigma$. Die durch $\{\cdots\}$ angedeuteten Ausdrücke sind in einfacher Weise von der obigen Funktion $\mathfrak{H}(\sigma, s)$ abhängig, und zwar für das Innengebiet von dem Werte, den $\mathfrak{H}$ für $\lambda = +1$, für das Außengebiet von dem, den $\mathfrak{H}$ für

$\lambda = -1$ annimmt. Der Verf. bezeichnet diese Werte resp. mit $\mathfrak{H}_{+1}$ und $\mathfrak{H}_{-1}$. Aus den Integralgleichungen, die oben für $H(\sigma, s)$ angegeben sind, werden die entsprechenden für $\mathfrak{H}_{+1}$ und $\mathfrak{H}_{-1}$ abgeleitet und weiter die für $\mathfrak{K} = \frac{1}{2}(\mathfrak{H}_{+1} + \mathfrak{H}_{-1})$ und $\mathfrak{K}_1 = \frac{1}{2}(\mathfrak{H}_{+1} - \mathfrak{H}_{-1})$. $\mathfrak{K}_1$ ergibt sich dann aus $\mathfrak{K}$ durch eine Quadratur; es ist also die Kenntnis der Randfunktion $\mathfrak{K}(\sigma, s)$ ausreichend zur Bestimmung der beiden Funktionen $\mathfrak{H}_{+1}$ und $\mathfrak{H}_{-1}$ und damit zur Bildung des Potentials für beide Gebiete. Aus den Reihen für $\mathfrak{H}_{+1}$ und $\mathfrak{H}_{-1}$ folgt auch eine konvergente Entwicklung von $\mathfrak{K}(\sigma, s)$.

Weiter wird gezeigt, daß, wie $h(\sigma, s)$ die Ableitung einer in bezug auf s und σ symmetrischen Funktion nach σ ist, auch $\mathfrak{H}_\lambda(\sigma, s)$ sich als Differentialquotient einer anderen Funktion darstellen läßt:

$$\mathfrak{H}_\lambda(\sigma, s) = \frac{d}{d\sigma}\mathfrak{P}_\lambda(\sigma, s).$$

Man erhält $\mathfrak{P}$ folgendermaßen. Ist $d\mathfrak{m}(s) = \mathfrak{m}'(s)ds$ das Massenelement der natürlichen Verteilung, so setze man

$$\mathfrak{m}(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \mathfrak{m}'(s)ds,$$

ferner

$$\mathfrak{p}(\sigma, s) = \frac{1}{\pi}\text{arc tg}\frac{y_\sigma - y_s}{x_\sigma - x_s} - \mathfrak{m}(\sigma) - \mathfrak{m}(s).$$

Die Funktion $\mathfrak{p}$ ist nicht nur symmetrisch, sondern auch auf der ganzen Berandung endlich und stetig und kehrt nach einem Umlauf irgendeines der Punkte σ, s um die Randkurve zum Ausgangswerte zurück, was bei $\frac{1}{\pi}\text{arc tg}\frac{y_\sigma - y_s}{x_\sigma - x_s}$ nicht der Fall ist. Bildet man aus $\mathfrak{p}(\sigma, s)$ die *Neumann*sche Funktionenfolge $\mathfrak{p}(\sigma, s), \mathfrak{p}_1(\sigma, s), \mathfrak{p}_2(\sigma, s), \ldots$, so ist

$$\mathfrak{P}_\lambda(\sigma, s) = \mathfrak{p}(\sigma, s) - \lambda\mathfrak{p}_1(\sigma, s) + \lambda^2\mathfrak{p}_2(\sigma, s) - \cdots.$$

Die durchaus endliche und stetige Funktion $\mathfrak{P}$ hat die merkwürdige Eigenschaft, daß

$$\mathfrak{P}_{-\lambda}(\sigma, s) = \mathfrak{P}_\lambda(\sigma, s)$$

ist. Weiter ergibt sich, daß, wenn die Randfunktion $\mathfrak{P}(\sigma, s)$ das Randwertproblem im Innengebiet löst, in ganz analoger Weise $\mathfrak{P}(s, \sigma)$ die Lösung für das Außengebiet gibt. Aus dem Symmetriegesetz für die Funktion $\mathfrak{P}$ folgt, daß die singulären λ-Werte, die ja einfache Pole von $\mathfrak{P}_\lambda(\sigma, s)$ sind, in der reellen λ-Achse vom Nullpunkt aus symmetrisch liegen. Übrigens läßt sich die Funktion $\mathfrak{P}_\lambda(\sigma, s)$, die für den Kreis $=$ 0 ist, für die Ellipse vollständig bestimmen; $\mathfrak{P}(\sigma, s)$ wird hier durch den Logarithmus eines unendlichen Produktes dargestellt, das große Analogie mit den unendlichen Produkten für die Thetafunktionen hat.

Zum Schluß wird eine gleichzeitige Lösung des Randwertproblemes für das Innen- und Außengebiet in der Form eines Potentials V einer einfachen Schicht gegeben. Die Lösung hat folgende Form: Es gibt eine nur von der Form des Gebietes abhängige symmetrische Randfunktion $\Delta(\sigma, s) = \Delta(s, \sigma)$, die bei Annäherung der Punkte s und σ gegeneinander wie $\frac{1}{\pi^2}\log r_{s\sigma}$ unendlich wird. Bildet man aus ihr durch Integration über den Rand

$$\mu(s) = \int \Delta(s, \sigma)\, df(\sigma),$$

wo $f(s)$ die überall stetigen gegebenen Randwerte bezeichnet, so ist

$$V(p) = \int \log\frac{1}{r_{ps}} \cdot d\mu(s)$$

jenes Potential, welches die Randwerte $f(s)$ bis auf eine additive, nämlich die *Neumann*sche, Konstante hat. Die Hinzufügung dieser Konstante zu V gibt dann die genaue Lösung beider Probleme. Die Bestimmung der Funktion $\Delta(s, \sigma)$ wird durch zwei Funktionen $\mathfrak{G}^+(\sigma, s)$ und $\mathfrak{G}^-(\sigma, s)$ vermittelt, die mit der "charakteristischen Funktion" von F. *Neumann* zusammenhängen. Für die Ellipse hat $\Delta(\sigma, s)$ folgenden Wert:

$$\Delta(s, \sigma) = \frac{1}{2\pi^2}\log\sin\frac{\sigma - s}{2} \cdot \vartheta_1\left(\frac{\sigma - s}{2}\right)\vartheta\left(\frac{\sigma + s}{2}\right),$$

wo ϑ_1 und ϑ die *Jacobi*schen Thetafunktionen sind.

Reviewer: Wangerin, Prof. (Halle a. S.)