Weyl, H.

Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen. (German) JFM 41.0343.01

Math. Ann. 68, 220-269 (1910).

Die vorliegende Arbeit verfolgt das Ziel, die Theorie der singulären Integralgleichungen, wie Verf. sie, auf die Untersuchungen von *Hilbert* (Gött. Nachr. 1906, 157 ff. 4. Mitteilung) und *Hellinger* (Diss. Gött. 1907 u. J. für Math. 136) gestützt, in Math. Ann. 66, 273 ff. entwickelt hat, für die Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung nutzbar zu machen. Es handelt sich dabei um Differentialgleichungen, welche an dem einen Ende ihres reellen Integrationsintervalles eine Singularität von mehr oder minder kompliziertem Charakter aufweisen, und um die Aufstellung der aus solchen Differentialgleichungen entspringenden Entwicklungen willkürlicher Funktionen, wie sie in dem einfachsten Falle der Gleichung $d^u/ds^2 = 0$ als *Fourier*sche Reihe und *Fourier*sches Integraltheorem seit langem bekannt sind. Nachdem *Hilb* (Math. Ann. 66, 1 ff.) durch Ausführung eines ähnlichen Grenzüberganges, wie ihn *Hilbert* in seiner vierten Mitteilung (l. c.) anwendet, zwei besondere Typen solcher singulären Differentialgleichungen erfolgreich behandelt hat, nimmt Verf. hier die gestellte Frage nach einer anderen Methode in allgemeinster Weise in Angriff, d. h. ohne irgendeine beschränkende Voraussetzung über die Natur der Singularität, welche die Differentialgleichung darbietet, zu machen.

Im Kap. I wird durch eine besondere Anwendung des Imaginären diejenige Funktion aufgestellt, welche (als Ersatz der *Green*schen Funktion) den Übergang von der Differential- zur Integralgleichung ermöglicht, und zugleich eine für das Folgende fundamentale Unterscheidung aller in Betracht kommenden Differentialgleichungen in zwei Typen, den "Grenzkreis" und den "Grenzpunkt-Typus", vorgenommen. Darauf werden in Kap. II und III diese beiden Typen, namentlich mit Rücksicht auf die zu ihnen gehörigen Reihenentwicklungen und Integraldarstellungen, gesondert untersucht. Zum Schluß endlich gibt Verf. eine Methode an, wie man bei der Diskussion spezieller Differentialgleichungen [nach Art der von *Wirtinger* (Math. Ann. 48, 387) und *Hilb* (l. c. Kap. II u. III) betrachteten] zu einer genaueren Kenntnis der Lage und Natur des Punkt- und Streckenspektrums gelangen kann. – Als Intervall der Differentialgleichung wählt Verf. stets, indem er die singuläre Stelle ins Unendliche verlegt, $0 \leqq s < \infty$. – Einen Teil der Resultate dieser Arbeit hat Verf. bereits in Gött. Nachr. 1909, 37 ff., jedoch in weniger allgemeiner Form, veröffentlicht.

Reviewer: Wallenberg, Prof. (Berlin)

References:

[1] Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 4. Mitteilung, Göttinger Nachrichten (Math. phys. Klasse) 1906, pag. 157 ff.; Hellinger, Inauguraldissertation, Göttingen 1907. Hellinger, Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen (Habilitationsschrift), Crelles Journal, Bd. 136. (Diese letztgenannte Abhandlung erschien erst während des Druckes der vorliegenden Arbeit.)

[2] Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, 4. Mitteilung, Göttinger Nachrichten (Math. phys. Klasse) 1906, Bd. 66, pag. 273ff.

[3] In den ersten drei Kapiteln seiner Habilitationsschrift, Math. Ann. Bd. 66, pag. 1.

[4] Math. Ann. Bd. 48, pag. 387.

[5] a. a. O., Math. Ann. Bd. 48, pag. 387. Kap. II und III.

[6] Einen Teil der Resultate dieser Arbeit habe ich bereits in den Göttinger Nachrichten 1909, pag. 37 ff., jedoch in weniger allgemeiner Form, veröffentlicht.

[7] Diese Formel ergibt sich mittels der auf lineare Differentialgleichungen bereits von Caqué, L. Fuchs, Poincaré, Günther u. a. angewandten, in allgemeinster Weise aber erst von É. Picard [vergl. Traité d'Analyse (2. Aufl.), Bd. II, pag. 340 ff.] entwickelten Methode der sukzessiven Approximation.

[8] Siehe auch Picard, Traité d'Analyse, Bd. III, pag. 89.

[9] Vergl. die ganz analoge Beziehung für reelle ? in meiner oben erwähnten Nots, Göttinger Nachrichten 1909, pag. 44.

[10] Hilbert, 5. Mitteilung, Göttinger Nachrichten 1906, pag. 460.

[11] Transformiert man die Gleichungsprobleme, welche Hilbert (Gött. Nachr. 1904, pag. 213 ff.), Kneser (Math. Ann. Bd. 58, pag. 81 ff. und Bd.63, pag.477ff.) u. a. untersucht baben, auf das Intervall O...?, so erhält man stets Gleichungen vom Grenzkreistypus.

[12] Math. Ann. Bd. 66, pag. 276.

[13] Gött. Nachr. 1906, pag. 439 ff.

[14] Hilbert, 5. Mitteilung, Gött. Nachr: 1906, pag. 457. E. Schmidt, Math. Ann. Bd. 63, pag. 452.

[15] Vergl. E. Schmidt, Math. Ann. Bd. 63, pag. 453f.

[16] Diese Definition entspricht der von Herrn Hellinger im Falle quadratischer Formen von unendlichvielen Variablen gegebenen Definition des Streckenspektrums (Dissertation, pag. 22: Crelles Journal, Bd. 136, pag. 242).

[17] Hellinger, Dissertation, pag. 26ff.; Crelles Journal, Bd. 136, pag. 237.

[18] ? bedeutet zugleich das sich auf dieses Intervall beziehende Differenzsymbol; vgl. Math. Ann. Bd. 66, pag. 288 u. 294.

[19] Zur Rechtfertigung der vorgenommenen Integrationsvertauschung s. Math. Ann. Bd. 66, pag. 286.

[20] Hellinger, Dissertation, pag. 26 und pag. 30.

[21] Oszillationsbetrachtungen für Differentialgleichungen mit Singularitäten findet man namentlich bei Bôcher (Bulletin of the Am. Math. Soc., Okt. 1898, pag. 22 und Transactions of the Am. Math. Soc., Jan. 1900, pag. 40; vergl. auch Encyklopädie

[22] Kneser, Math. Ann. Bd. 42, pag. 415f.

[23] Einen Teil dieses Satzes hat im Fallep(s)?1 bereits Herr Kneser (Crelles Journal Bd. 117, pag. 84) bewiesen.

[24] Die Hilbschen Voraussetzungen kommen darauf hinaus, daßp(s), q(s) analytische Funktionen einer komplexen Variablens sind, die für alles, deren Realteil eine gewisse negative Grenze übersteigt, regulär sind, absolut unter einer festen Schranke bleiben und eine rein imaginäre Periode, etwa 2?i, besitzen. Unter diesen Umständen konvergierenp(s), q(s) fürs=+? je gegen eine feste Grenze, und zwar ebenso stark, wiee ?2 gegen 0 konvergiert. Natürlich wird die Grenze, gegen welchep(s) konvergiert, als von 0 verschieden vorausgesetzt. ? Neuerdings hat Herr Plancherel (Math. Ann. Bd. 67, pag. 519 ff.) die Gültigkeit der Hilbschen Integraldarstellungen unter beschränkteren Voraussetzungen für die zu entwickelnde Funktionf(s) bewiesen.

[25] Vergl. z. B. Hilbert, Gött. Nachr. 1904, pag. 226.

[26] Derartige Gleichungen sind zuerst von Hilbert (Gött. Nachr. 1906, pag. 473ff.) behandelt worden.

[27] Vergl. Hilb, a. a. O, Kap. IV. B. Hilbert, Gött. Nachr. 1904, pag. 226.