Haar, A.

Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme. (Erste Mitteilung.). (German)

JFM 41.0469.03
Math. Ann. 69, 331-371 (1910).

Diese Arbeit (Abdruck einer Göttinger Dissertation) enthält eine systematische Theorie der orthogonalen Funktionensysteme mit Anwendungen auf die *Legendre*schen Polynome und auf die *Sturm-Liouville*schen Funktionen.

Es mögen die Funktionen $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots$ ein im Intervall $(0,1)$ definiertes orthogonales Funktionensystem bilden; wir setzen

$$\varphi_1(s)\varphi_1(t) + \varphi_2(s)\varphi_2(t) + \cdots + \varphi_n(s)\varphi_n(t) = K_n(s,t).$$

Ausgehend von einem von *Lebesgue* herrührenden Gedanken, wird der folgende Satz bewiesen: Wenn die unendlich vielen Zahlen

$$\int_0^1 |K_n(s_0,t)|dt$$

nicht unterhalb einer festen Grenze liegen, d. h. wenn

$$\limsup_{n=\infty} \int_0^1 |K_n(s_0,t)|dt = \infty$$

ist, so existiert eine stetige Funktion $f(s)$, deren *Fourier*sche Reihe in bezug auf das betrachtete Orthogonalsystem, d. h. die Summe

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(s) \int_0^1 f(t)\varphi_n(t)dt$$

an der Stelle $s = s_0$ divergiert.

Als Anwendung davon wird die Existenz stetiger Funktionen bewiesen, deren *Legendre*sche, bzw. *Sturm-Liouville*sche Reihe divergiert.

Kapitel II enthält die Umkehrung des ersten Satzes: Umfaßt der "Bereich" des betrachteten Orthogonalsystems alle stetigen Funktionen, d. h. kann man jede stetige Funktion durch eine lineare Kombination der Funktion $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ mit konstanten Koeffizienten mit beliebiger Genauigkeit gleichmäßig approximieren, ist ferner

$$\limsup_{n=\infty} \int_0^1 |K_n(s_0,t)|dt$$

endlich, so ist die Reihe (1) an der Stelle $s = s_0$ konvergent und stellt den Wert $f(s_0)$ dar.

Als Anwendung auf die *Sturm-Liouville*schen Reihen ergibt sich der folgende Satz:

Die *Sturm-Liouville*sche Reihe einer Funktion an einer Stelle ist dann und nur dann konvergent, divergent, bzw. einfach summabel, wenn die Kosinusreihe dieser Funktion an dieser Stelle diese Eigenschaften hat; im Falle der Konvergenz und Summabilität sind die durch beide Reihen dargestellten Werte dieselben.

Durch diesen Satz wird die gesamte Theorie der *Sturm-Liouville*schen Reihen auf die der gewöhnlichen *Fourier*schen zurückgeführt; insbesondere erhält man die Verallgemeinerung des *Fejér*schen Satzes: Die *Sturm-Liouville*sche Reihe jeder stetigen Funktion ist einfach summabel.

Das letzte Kapitel enthält die Theorie eines speziellen orthogonalen Funktionensystems, dem die Eigenschaft zukommt, daß die in bezug auf dieses System gebildete *Fourier*-Reihe jeder stetigen Funktion konvergiert.

Reviewer: Haar, Prof. (Budapest)

Full Text: DOI EuDML

References:

[1] Math. Annalen Bd. 67, S. 76.

[2] Mit einer ähnlichen Methode hat Herr Lebesgue eine stetige Funktion konstruiert, deren trigonometrische Reihe divergent bezw. nicht gleichmäßig konvergent ist. (Cf. Lebesgue, Séries trigonométriques, S. 87) In einer kürzlich in den Annales de Toulouse (3e série, t. I) erschienenen Abhandlung hat Herr Lebesgue seine Resultate verallgemeinert. Man findet daselbst manche Berührungspunkte mit der vorliegenden Arbeit.

[3] Cf. Hobson, Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, Bd. 6 (1908), S. 349. · Zbl 39.0476.02 · doi:10.1112/plms/s2-6.1.349

[4] Vgl. etwa Kneser, Math. Ann. Bd. 60, S. 402.

[5] Vgl. Christoffel, Journal für Mathematik Bd. 55, S. 73.

[6] Als Spezialfall dieses Satzes ergibt sich ein von Herrn H. Lebesgue ausgesprochenes Theorem (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo Bd. 26 (1908), S. 325).

[7] Natürlich kann man diesen Satz auch aus dem Satze S. 355 ableiten, doch scheint es zweckmäßig zu sein, diesen sehr verallgemeinerungsfähigen Weg einzuschlagen.