**Conner, J. R.**

**Basic Systems of rational norm-curves.** (English) JFM 41.0721.03

Amer. Journ. 32, 115-176 (1910).

Unter einer "Basis" wird eine Gruppe von $n+2$ Punkten im $R_n$ verstanden. Diese Figur besteht aus der größten Anzahl unabhängiger Punkte, die mit irgend einer andern solchen projektiv äquivalent ist. Die Normkurve im $R_n$ sei $N_n$, sie hängt von $n^2+2n-3$ Konstanten ab. Es gibt noch eine $\infty^{n-1}$ Schar von $N_n$, die durch eine vorgegebene Basis gehen: eine solche Schar heißt ein "Basisches System rationaler Normkurven"; durch irgend einen Punkt der $R_n$ geht eine einzige basische $N_n$.

Als Grundlage dient der allgemeine Berührungssatz: Basische $N_n$ im $R_n$, die eine $p$-punktige Berührung mit einem $R_{n-1}(\alpha x)^m=0$ (kurz mit $\alpha$ bezeichnet) von der Ordnung $m$ besitzen, berühren in Punkten eines $R_{n-p}$ von der Ordnung $m(m+1)\cdots(m+p-1)$, der der vollständige Schnitt von $\alpha$ mit $(p-1)R_{n-1}$ von den Ordnungen $m+1, m+2, \dots, m+p-1$ ist.

Von besonderem Interesse ist der Spezialfall, wo eine basische $N_n$ keine $p$-punktige Berührung mit $\alpha$ haben kann, ohne ganz in $\alpha$ zu liegen.

Der Berührungssatz wird zunächst auf das Gebiet $R_2$ von zwei Dimensionen angewendet. Die Basis besteht hier aus vier Punkten, und die Basisnormkurven sind die Kegelschnitte des zugehörigen Büschels. Für eine Kurve $C_m$, von der Ordnung $m$, mit $\delta$ Doppelpunkten und $\kappa$ Spitzen, folgt dann $N=m(m+1)-2\delta-3\kappa$ als Anzahl $N$ der die Kurve eigentlich berührenden Basiskegelschnitte. Fügt man den Basiskegelschnitten noch einen beliebigen Kegelschnitt $C_2$ hinzu, so entsteht eine rationale Kurve sechster Ordnung $\Sigma$ auf folgende Weise. Durch einen Schnittpunkt eines Basiskegelschnitts mit $C_2$ lege man die Tangente an $C_2$; der zweite Schnittpunkt der Tangente mit dem Basiskegelschnitt beschreibt die Kurve $\Sigma$.

Diese Kurve $\Sigma$ erweist sich von Wichtigkeit für die späteren Entwicklungen im $R_n$. Von ihren 10 Doppelpunkten fallen vier in die Basispunkte, während die übrigen sechs paarweise auf drei Basiskegelschnitten liegen.

Nunmehr wird die eineindeutige involutorische quadratische Punktverwandtschaft $T(x,y)$ herangezogen, wo $x$ und $y$ bezüglich aller Basiskegelschnitte konjugiert sind. Die Ecken des gemeinsamen Polardreiecks $\Delta$ sind die Fundamentalpunkte von $T$. Jeder Geraden $(x)$ entspricht ein Kegelschnitt $(y)$ durch die Ecken von $\Delta$, und einem beliebigen Kegelschnitte $C_2$ eine rationale $C_4$ mit Doppelpunkten in den Ecken von $\Delta$. Somit gibt es auf jeder $C_2$ vier Paare entsprechender Punkte, die Schnittpunkte der $C_2$ mit der $C_4$. Man denke sich vier weitere feste Punkte (in der Ebene von $T$) gegeben, dann ist der geometrische Ort eines Punktes $x$, dessen entsprechender Punkt $y$ mit $x$ und jenen vier festen Punkten auf einem Kegelschnitte liegt, eine Kurve sechster Ordnung $S$, die gegenüber $T$ invariant ist. Die Geraden, die entsprechende Punkte $x, y$ auf $S$ verbinden, umhüllen eine Kurve vierter Klasse $\Gamma_4$.

Nach diesen Vorbereitungen werden die basischen Normkurven $N_3$ im $R_5$ untersucht. Die Basis besteht aus fünf Punkten, $1,2,\dots,5$, durch die eine $\infty^2$-Schar von $N_3$ geht, andererseits aber eine $\infty^4$-lineare Schar von Flächen zweiter Ordnung $F_2$ (die "'basischen" $F_2$). Irgend eine Ebene $\alpha$ wird von den basischen $F_2$ in einer $\infty^4$-linearen Schar von Kegelschnitten getroffen, die apolar sind zu einem bestimmten Kegelschnitte $C_\alpha$ in $\alpha$, andererseits wird $\alpha$ von den basischen $N_3$ in Polardreiecken $G_3^{(3)}$ bezüglich $C_\alpha$ geschnitten. Diejenigen basischen $N_3$, die $\alpha$ berühren, berühren in Punkten von $C_\alpha$. Es gibt sechs der $N_3$, die $\alpha$ oskulieren. Der Schnitt von $\alpha$ mit dem basischen Fünfeck ist eine *Desargues*sche Konfiguration $B$; ihre 10 Ecken sind die Doppelpunkte einer rationalen Kurve sechster Ordnung, des Ortes der Restschnittpunkte der $\alpha$ berührenden $N_3$ mit $\alpha$.

Man projiziere die basischen $N_3$ von einem Basispunkte, etwa 5, aus. Damit entsteht ein Büschel von Kegeln (zweiter Ordnung), mit der Spitze in 5, und mit den vier gemeinsamen Kanten 15,25,35,45; dieser Büschel trifft die Ebene $\alpha$ in einem Büschel von Kegelschnitten durch die Spurpunkte 15,25,35,45, und diese Kegelschnitte sind apolar zu $C_\alpha$.

Dann sind die Punktgruppen $G_3^{(3)}$ charakterisierbar als die Ecken solcher Poldreiecke von $C_\alpha$, die Kegelschnitten des Büschels 15,25,35,45 einbeschrieben sind; der bezügliche Kegelschnitt geht zugleich durch ein Polviereck von $C_\alpha$. Unter den Kegelschnitten des Büschels gibt es sechs, die $C_\alpha$ berühren; die Berührungspunkte sind die sechs oben erwähnten Oskulationspunkte. Die obige Kurve sechster Ordnung ist keine andere, als die im Gebiete der Ebene auftretende Kurve $S$, die jetzt innerhalb der Raumfigur eine Reihe weiterer ausgezeichneter Eigenschaften aufweist, indem die vier Punkte 15, 25, 35, 45 als Basispunkte in $\alpha$ gewählt werden. Die obigen sechs Oskulationspunkte liegen mit den sechs Spurpunkten 15, 25, 35, 12, 23, 31 auf einer Kurve dritter Ordnung. Andererseits gibt es sechs Kegelschnitte der einem Polvierseit von $C_\alpha$ einbeschriebenen Schar, die $C_\alpha$ berühren; die sechs Berührungspunkte liegen mit den sechs Ecken des Polvierseits ebenfalls auf einer Kurve dritter Ordnung, und hierzu gilt der dualistische Satz.

Wendet man das eingangs erwähnte Berührungstheorem an, so erkennt man, daß der Ort der Punkte, in denen basische $N_3$ eine Fläche $m$-ter Ordnung $F_m$ berühren, in den Knotenpunkten von $F_m$ Doppelpunkte besitzt; hat im besondern die $F_m$ eine Doppelkurve, so spaltet sich diese, doppelt zählend, von der ersten Kurve ab.

Eine ausgezeichnete Rolle spielt diejenige basische $N_3$, die eine gegebene Raumgerade $\pi$ zur Bisekante hat (d. h. zweimal trifft), sowie diejenige kubische Fläche, die erzeugt wird durch die Kegelschnitte $C_{\alpha+\lambda\beta}$ des Ebenenbüschels $\alpha + \lambda\beta$ durch die Gerade $\pi$; diese Fläche enthält $\pi$, sowie die fünf Basispunkte, und ist auch definierbar als Ort eines Punktes $x$, so daß die Tangente in $x$ an die durch $x$ gehende basische $N_3$ die Gerade $\pi$ trifft. Berührt im besondern $\pi$ eine basische $N_3$, so hat die kubische Fläche im Berührungspunkte einen Knotenpunkt, und die ihn mit den fünf Basispunkten verbindenden Geraden sind nebst $\pi$ die sechs durch den Knotenpunkt laufenden Geraden der Fläche, die dann einem Kegel zweiter Ordnung angehören.

Man betrachte ferner eine Gerade $p$. In irgend einem Punkte $x$ von $p$ lege man die Tangente an die durch $x$ gehende $N_3$; dann erzeugen diese Tangenten eine kubische Regelfläche mit $p$ als Leitlinie, die zu der obigen (allgemeinen) kubischen Fläche in nähere Beziehung gesetzt wird.

Nunmehr wird die Gesamtheit der Tangenten aller basischen $N_3$ untersucht; diese gehört einem Komplex sechster Ordnung an.

Weiter wird ein Satz von *Sturm* (F. d. M. 6, 401, 1874, JFM 06.0401.01) von Wichtigkeit. Da die basischen $N_3$ eine $\infty^2$-Schar bilden, so erfüllen diejenigen $N_3$, denen eine einzelne Bedingung auferlegt ist, eine gewisse Fläche. Zwei solche Flächen können sich dann nach *Sturm* nur in eigentlichen basischen $N_3$ und etwa Teilen von ausgearteten basischen $N_3$ schneiden. Eine ausgezeichnete solche Fläche $F_5$ fünfter Ordnung wird von den $N_3$ erzeugt, die eine gegebene Gerade $\pi$ treffen; die $F_5$ wird von einer beliebigen Ebene $\alpha$ in einer $C_5$ mit drei Doppelpunkten geschnitten, im besonderen von einer Ebene $\alpha + \lambda\beta$ durch $\pi$ in $\pi$ selbst und einer $C_4$. Ist $M$ der Pol von $\pi$ in bezug auf den Kegelschnitt $C_{\alpha+\lambda\beta}$, so ist die $C_4$ der Ort der Punkte in den Ebenen $\alpha + \lambda\beta$, von denen $M$ und die fünf Basispunkte durch sechs Kanten eines Kegels zweiter Ordnung projiziert werden.

Sodann werden gewisse Kurven auf den mit den basischen $N_3$ verknüpften Flächen verfolgt. Liegt wiederum eine Fläche $F_m$ $m$-ter Ordnung vor, so wird dieselbe von basischen $N_3$ berührt in Punkten einer Kurve der Ordnung $m(m + 1)$, die aus $F_m$ durch eine $F_{m+1}$ ausgeschnitten wird. Diese berührenden $N_3$ treffen die $F_m$ noch in Restpunkten, die eine Kurve von der Ordnung $m(m+1)(5m-2)$ erfüllen, die in den $10m$ Punkten, wo die 10 Basisgeraden die $F_m$ treffen, $\{m(m + 1)\}$-fache Punkte besitzt; die berührenden $N_3$ selbst liegen auf einer Fläche der Ordnung $5m(m + 1)$. Von diesen und verwandten Kurven und Flächen werden gewisse besondere Fälle von Bedeutung. So, wenn die $F_m$ eine $F_2$ durch die Basispunkte ist; eine die $F_2 2$ berührende basische $N_3$ gehört dann der $F_2$ ganz an, und solcher $N_3$ gibt es gerade zwei. Gehört die $F_2$ einem gewissen Büschel an, so erzeugen jene beiden $N_3$ eine Fläche fünfter Ordnung mit fünf dreifachen Punkten; die ebenen Schnitte dieser Fläche stehen, in einer merkwürdigen Beziehung zu der bezüglichen *Desargues*schen Konfiguration und führen zu weiteren Konfigurationen.

Weitere mit der Basis verbundene Flächen werden durch Oskulation geliefert. Liegt ein Netz von $F_m$ vor, so oskulieren basische $N_3$ in Punkten einer $F_{3(m+1)}$; im besondern für $m = 1$ (Ebenen durch einen Punkt) ist der Ort der Oskulationspunkte eine $F_6$.

Endlich sei noch ein merkwürdiger Geradenkomplex vierter Ordnung erwähnt; diesem gehören die Geraden an, die von basischen $N_3$ in einem Paar von Punken getroffen werden, die bezüglich einer gegebenen $F_2$ konjugiert sind.

Die Fülle von Eigenschaften, die so der Figur von fünf Raumpunkten angehören, wird auf die Figur von sechs Punkten im $R_4$ und weiterinn auf die von $n+$ Punkten im $R_n$ ausgedehnt. Trotzdem der äußere Umfang der so hervorgehenden Sätze erheblich wächst, weshalb in dieser Hinsicht auf die Abhandlung selbst verwiesen sei, so scheint es dem Referenten doch, als ob bei diesen Ausdehnungen das Interesse nicht in gleichem Maße zunimmt.

Reviewer: Meyer, F., Prof. (Königsberg i. Pr.)



**Full Text:** DOI