Cartan, E.

Les groupes de transformations continus, infinis, simples. (French) JFM 40.0193.02

Ann. de l'Éc. Norm. (3) 26, 93-161 (1909).

Die Arbeit bringt die Beweise für eine Reihe sehr wichtiger, vom Verf. schon früher (F. d. M. 38, 194, 1907, JFM 38.0194.01) mitgeteilter Sätze. In Kap. I wird die lineare homogene Gruppe Γ untersucht, durch die eine unendliche Gruppe G des R_n die Linienelemente eines festgehaltenen Punktes von allgemeiner Lage transformiert. Es ergibt sich eine Einteilung der linearen homogenen Gruppen in involutive, semiinvolutive und die übrigen. Die Gruppe Γ kann nur einer der beiden ersten Klassen angehören. In Kap. V werden die semiinvolutiven linearen homogenen Gruppen in n Veränderlichen bestimmt, die keine ebene Mannigfaltigkeit invariant lassen. Es sind nur vier: die allgemeine und die spezielle lineare homogene Gruppe und für gerades n die beiden Gruppen, die den Ausdruck $x_1dx_2-x_2dx_1+\cdots+x_{n-1}dx_n-x_ndx_{n-1}$ entweder invariant lassen oder bis auf einen konstanten Faktor reproduzieren. Auf Grund dieses Satzes wird in Kap. II bewiesen, daß für die Gruppe Γ, sobald G primitiv ist, nur fünf Möglichkeiten vorhanden sind, und in Kap. III, daß G eine der folgenden Gruppen ist: Die Gruppe aller Punkttransformationen. Die Gruppe, die alle Volumina invariant läßt oder diese proportional ändert. Die Gruppe, die, n gerade und > 2 angenommen, den Ausdruck $dx_1\delta x_2 - dx_2\delta x_1 + \cdots + dx_{n-1}\delta x_n - dx_n\delta x_{n-1}$ entweder invariant läßt oder ihn bis auf einen konstanten Faktor reproduziert. Die Gruppe, die bei ungeradem n durch eine *Pfaff*sche Gleichung von allgemeiner Beschaffenheit definiert ist. Der Verf. bestimmt, nebenbei bemerkt, auch alle endlichen Gruppen, für die Γ eine jener fünf Formen hat. Die Bestimmung der hier behandelten Gruppen ist zum Teil schon von *Lie* selbst geleistet; aber auch die von *Lie* nicht behandelten Fälle würden sich nach *Lie*s Methoden mindestens ebenso leicht erledigen lassen wie hier. Nachdem alle primitiven unendlichen Gruppen gefunden sind, kennt man die Zusammensetzungen aller transitiven einfachen unendlichen Gruppen: einfach sind offenbar nur vier unter den aufgezählten sechs Gruppen. In Kap. IV werden dann noch die Zusammensetzungen aller intransitiven einfachen unendlichen Gruppen bestimmt. Für jede solche Zusammensetzung erhält man einen Repräsentanten, wenn man entweder eine einfach transitive endliche Gruppe oder eine primitive unendliche Gruppe nimmt und die willkürlichen Elemente der Gruppe von p neuen invarianten Veränderlichen abhängig sein läßt. Hat man p gewählt, so liefert jede solche Gruppe, wie der Verf. zeigt, nur *eine* intransitive einfache unendliche Gruppe. Ausgenommen ist der Fall der eingliedrigen einfach transitiven Gruppe. Diese liefert die unendliche Gruppe G:

$$u_1' = u_1, \ldots, u_p' = u_p,\ x' = x + f(u_1, \ldots, u_p),$$

wo f eine willkürliche Funktion ist. G enthält zwar nur invariante Untergruppen, die alle durch lineare homogene partielle Differentialgleichungen für f definiert sind. Aber man kann G und ebenso gewisse seiner Untergruppen als *uneigentlich einfach* bezeichnen. Eine Untergruppe G_1, von G heißt nämlich uneigentlich einfach, wenn eine Untergruppe G_2, von G_1 eine solche Untergruppe G_3 enthält, daß G_2, sobald man G_3 der identischen Transformation entsprechen läßt, eine zu G_1 holoedrisch isomorphe Gruppe liefert. Der Verf. gibt hierfür ein Beispiel.

Reviewer: Engel, Prof. (Greifswald)

Full Text: DOI Numdam EuDML