zbMATH Open
THE FIRST RESOURCE FOR MATHEMATICS

**Birkhoff, G. D.**

**Singular points ot ordinary linear differential equations.** (English) JFM 40.0352.02

Trans. Am. Math. Soc. 10, 436-470 (1909).

Es sei

$$(1)\quad \frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)y_j\ (i=1,2,\dots,n)$$

ein System von $n$ totalen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung, in welchem für $|x|>R$

$$(2)\quad a_{ij}(x)=a_{ij}x^q+a_{ij}^{(1)}x^{q-1}+\dots+a_{ij}^{(q)}+a_{ij}^{(q+1)}\frac{1}{x}+\cdots(i,j=1,2,\dots,n)$$

und $q$ eine ganze Zahl ist. Verf. untersucht in der vorliegenden Arbeit die Natur der Lösungen von (1) in der Umgebung des Punktes $x=\infty$, welcher als singulärer Punkt des Systems (1) angenommen wird, so daß $q+1$ ist; die Zahl $q+1$ wird nach *Poincaré* (Acta Math. 8, 305, 1886) der *Rang* des Systems (1) bei $x=\infty$ genannt. Die $n$ Wurzeln $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$) der *charakteristischen Gleichung*

$$|a_{ij}-\delta_{ij}\alpha|=0(\delta_{ij}=0(i\neq j),\delta_{ii}=1)$$

werden voneinander verschieden angenommen und sollen sich im Falle $q=-1$ nicht um ganze Zahlen unterscheiden (der allgemeine Fall soll später behandelt werden). Durch eine geeignete lineare Transformation

$$\overline{y_i}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}(x)y_j,$$

worin die Funktionen $\lambda_{ij}(x)$ in $x=\infty$ analytisch sind oder daselbst einen Pol besitzen, wird das System (1) in ein System ($\overline{1}$) mit Koeffizienten $\overline{a}_{ij}(x)$ von derselben Form (2) transformiert, nur daß $\overline{q}$ nicht notwendig gleich $q$ ist; ein solches System ($\overline{1}$) wird dem System (1) bei $x=\infty$ äquivalent genannt.

Im ersten Teile der Arbeit wird die Bestimmung des einfachsten Differentialgleichungssystems durchgeführt, welches mit (1) bei $x=\infty$ äquivalent ist. Zu diesem Zwecke wird in § 1 ein wichtiges Lemma über analytische Funktionen aufgestellt und bewiesen. Die Anwendung dieses Lemmas in § 2 zeigt, daß immer ein dem System (1) bei $x=\infty$ äquivalentes kanonisches System von der Form

$$x\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}P_{ij}(x)y_j\ (i=1,2,\dots,n)$$

existiert, in welchem die $P_{ij}(x)$ Polynome sind. In § 3 wird gezeigt, daß der Rang dieses kanonischen Systems bei $x=\infty$ gleich $q$ angenommen werden kann, so daß der Grad der Polynome $P_{ij}(x)$ nicht größer als $q+1$ ist.

Die Bedeutung dieser Resultate wird durch Betrachtung des Falles eines regulären singulären Punktes ($q=-1$) erläutert. Das zu (1) äquivalente kanonische System lautet dann in der einfachsten Form (§ 3):

$$x\frac{dY_1}{dx}=\alpha_1Y_1,\ x\frac{dY_2}{dx}=\alpha_2Y_2,\dots,x\frac{dY_n}{dx}=\alpha_nY_n;$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen desselben ist:

$$Y_i^{(j)}=\delta_{ij}x^{a_j}(i,j=1,2,\dots,n;\delta_{ij}=0(i\neq j),\delta_{ii}=1).$$

Die Lösungen dieses Systems sind aber mit denen von (1) durch eine Relation

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jj}(x)Y_j\ (i=1,2,\dots,n)$$

Edited by FIZ Karlsruhe, the European Mathematical Society and the Heidelberg Academy of Sciences and Humanities
© 2022 FIZ Karlsruhe GmbH 

verbunden, worin die $\lambda_{ij}(x)$ in $x = \infty$ analytisch sind (der Fall eines Poles kann leicht ausgeschlossen werden). Daraus folgt, daß das System (1) ein Fundamentalsystem von Lösungen von der Form

$$y_i^{(j)} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{ik}(x) Y_k^{(j)} = \lambda_{ij}(x) x^{a_j} \ (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

besitzt. Das ist das Fundamentaltheorem für einen regulären singulären Punkt (*Sauvage*, Ann. de l'Éc. Norm. (3) 3, 392, 1886). Die Lösungen des zu (1) bei $x = \infty$ äquivalenten kanonischen Systems spielen nun im Falle eines irregulären singulären Punktes ($q \geqq 0$) dieselbe Rolle wie in dem soeben betrachteten Falle.

Im § 4 werden die Lösungen des Systems (1) im Anschluß an die Arbeiten von *Poincaré* (American J. 7, 203-258, 1885) und *Horn* (Math. Ann. 50, 525-556, 1897) für $q \geqq 0$ durch verallgemeinerte Laplacesche Integrale dargestellt. Diese Integrale werden in § 5 angewendet, um die asymptotische Natur der Lösungen des zu (1) bei $x = \infty$ äquivalenten kanonischen Systems in gewissen Sektoren der $x$-Ebene zu ermitteln; die asymptotische Form der Lösungen des Systems (1) in denselben Sektoren ist die unmittelbare Folge (*Horn* (J. für Math. 133, 19-67, 1907) benutzt zu demselben Zweck die Methode der sukzessiven Approximationen). – In § 6 wird eine *Riemann*sche Charakterisierung der Lösungen des kanonischen Systems in der Umgebung von $x = \infty$ gegeben und auf die Lösungen des Systems (1) ausgedehnt; es ergibt sich, daß die Zahl der charakteristischen Konstanten in den Lösungen dieselbe ist wie die Zahl der willkürlichen Konstanten des kanonischen Systems. Diese, Charakterisierung macht die Verallgemeinerung des *Riemann*schen Problems auf den Fall wahrscheinlich, daß die singulären Punkte des Differentialgleichungssystems nicht regulär sind. Die Formulierung desselben, sowie eine Abzahlung der Konstanten wird in § 7 gegeben.

Reviewer: Wallenberg, Prof. (Berlin)

**MSC:**

| | | |
|---|---|---|
| 34C05 | Topological structure of integral curves, singular points, limit cycles of ordinary differential equations | Cited in **3** Reviews<br>Cited in **30** Documents |

**Full Text:** DOI


© 2022 FIZ Karlsruhe GmbH