Landau, E.

Über die Verteilung der Nullstellen der *Riemann*schen Zetafunktion und einer Klasse verwandter Funktionen. (German) JFM 40.0462.02

Math. Ann. 66, 419-445 (1909).

Unter Benutzung der Ergebnisse *Hadamard*s hatte *v. Mangoldt* durch eine längere Kette scharfsinniger Schlüsse die Richtigkeit der Vermutung *Riemann*s bewiesen, daß die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$, deren Ordinate zwischen Null (ausschließlich) und der positiven Größe T (einschließlich) liegt, gleich

$$\frac{1}{2\pi} T \ln T - \frac{1+\ln(2\pi)}{2\pi}\, T + 0(\ln T)$$

ist (F. d. M. 36, 263, 1905, JFM 36.0263.03). *Landau* ist es gelungen, den Beweis beträchtlich zu vereinfachen. In § 1 gibt er direkte Beweise einiger bekannten Ungleichheiten über die Gammafunktion und vermeidet so die Heranziehung der verwickelten Untersuchungen von *Stieltjes*, auf die sich *v. Mangoldt* bezogen hatte. In § 2 folgt der neue Beweis, dessen Kern in der Feststellung der Tatsache beruht, daß bei Fortsetzung längs der (von Wurzeln frei voraussetzbaren) Ordinate T der rein imaginäre Teil von $\ln\zeta(-1+Ti) = 0(\ln T)$ ist. Während hierbei von den tiefsten bekannten Eigenschaften der Zetafunktion Gebrauch gemacht wird, hat *Landau* noch einen andern Weg gefunden, der ganz unabhängig davon ist, so daß also eine viel allgemeinere Funktionenklasse die vorher erwähnte Eigenschaft besitzt, deren Nachweis bei der Zetafunktion bisher nur auf sehr speziellem Wege gelang; dieser allgemeine Satz wird in § 3 entwickelt.

Der Rest der Abhandlung betrifft die *Dirichlet*schen Reihen

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

wo $\chi(n)$ einen vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter der Gruppe der zu der positiven ganzen Zahl k teilerfremden Restklassen bezeichnet. Es wird zum ersten Male der Nachweis geführt (§ 4), daß sich die Anzahl aller Nullstellen der durch diese *Dirichlet*sche Reihe definierten ganzen transzendenten Funktion von $s = \sigma + it$ in der Gestalt

$$AT\ln T + BT + O(\ln B)$$

abschätzen läßt, wo AB und B konstanten bedeuten. Schließlich werden in § 5 einige nach dem Vorbilde der Zetafunktion näherliegende Folgerungen aus den bekannten Eigenschaften der Funktion $L(s)$ gezogen; es wird gezeigt, daß es eine positive Konstante a, gibt, so daß für $t \geqq 2, \sigma \geqq 1 - \frac{1}{a \ln t}$ die Funktion $L(s)$ von Null verschieden ist.

Reviewer: Stäckel, Prof. (Karlsruhe)

Full Text: DOI EuDML

References:

[1] ?Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann? [Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ser. 4, Bd. 9 (1893), S. 171-215], S. 214-215.

[2] ?Zu Riemanns Abhandlung ?Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse? [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 114 (1895), S. 255-305], S. 257-273.

[3] ?Zur Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Funktion ?(t)? [Mathematische Annalen, Bd. 60 (1905), S. 1-19], S. 2-11. · Zbl 36.0263.02

[4] ?Sur le développement de log ?(a)? [Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ser. 4, Bd. 5 (1889), S. 425-444]. · Zbl 21.0448.01

[5] ?Correspondance d' Hermite et de Stieltjes?, Bd. 2 (Paris, 1905), Appendice (?Lettres de Stieltjes à M. Mittag-Leffler sur

la fonction ?(s) de Riemann?, S. 445-457), vergl. insbesondere S. 452-456. Dort steht sogar rechtsO(1) statt desO(logT) in (7). Diese Genauigkeit ist aber unnötig, da man beim heutigen Stand der Wissenschaft über das letzte Glied in (7) doch nur aussagen kann, daß esO(logT) ist.

[6] Das jetzt Folgende ist der Hauptkunstgriff. Vorbildlich war mir dabei der verwandte Schluß Herrn von Mangoldts (vergl. die auf S. 421, Anm.

[7] Vergl. S. 191-192 meiner auf S. 420, Anm.

[8] Vergl. die zusammenhängende Darstellung mit Beweisen bei Herrn de la Vallée Poussin, ?Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers? [Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Bd. 20, Teil 2 (1896), S. 183-256 und S. 281-397], S. 281-348.

[9] Vergl., S. 31 Anm.

[10] Vergl. seine Abhandlung ?Sur la fonction ?(s) de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée? [Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, Bd. 59 (1899-1900), S. 1-74], S. 7-29, oder auch S. 208-212 meiner auf S. 420, Anm.

[11] ?Über die Primzahlen einer arithmetischen Progression? [Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. 112, Abt. 2a (1903), S. 493-535], S. 532.

[12] ?Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes? [Mathematische Annalen, Bd. 56 (1903), S. 645-670], S. 670. · Zbl 34.0228.03

[13] S. 187-188