Moore, Ch. N.

The summability of the developments in *Bessel* functions; with applications. (English)

JFM 40.0507.01
American M. S. Trans. 10, 391-435 (1909).

Es handelt sich um dieselbe Frage wie im vorhergehenden Referate, nämlich um die Konvergenz derjenigen nach *Bessel* schen Funktionen fortschreitenden Reihen, die in der mathematischen Physik bei zylindrisch begrenzten Körpern auftreten. Die Konvergenzbedingungen, zu denen der Verf. gelangt, sind nicht ganz von der Allgemeinheit wie die von *Hobson* gefundenen.

Zunächst werden verschiedene Hülfssätze über die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ der Gleichung

$$(1)\quad l\lambda I_v'(\lambda) + hI_v(\lambda) = 0$$

aufgestellt, die dadurch gewonnen werden, daß man in (1) I_v durch seine asymptotischen, für große λ gültigen Werte ersetzt, wodurch in (1) statt der *Bessel*schen Funktionen trigonometrischen auftreten. Die Hülfssätze lauten:

1. Es ist

$$\lambda_n > C \cdot n; \lambda_{n+1} - \lambda_n - \pi < \frac{K}{n^2},$$

wo C und K positive Konstanten sind.

2. Es läßt sich stets eine Konstante q und eine positive Konstante L so bestimmen, daß

$$|\lambda_n - n\pi - q| < \frac{L}{n}.$$

Dann wendet sich der Verf. der Untersuchung der Reihe

$$(2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_v(\lambda_n x)$$

zu, wo die A_n auf bekannte Weise als Quotienten zweier Integrale dargestellt werden. Durch ziemlich umständliche Betrachtungen, die nach dem Muster einer analogen Untersuchung von *Harnack* angestellt werden (vgL F. d. M. 19, 385, 1887, JFM 19.0385.01), und die sich schon wegen der Fülle der darin auftretenden Formeln hier nicht wiedergeben lassen, gelangt der Verf. zu dem Resultat, daß, wenn die Funktion $f(x)$ in dem Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ endlich und integrabel ist, die zur Funktion $f(x)$ gehörige Reihe (2) für jeden Wert x im Innern des Intervalls konvergiert, selbst wenn $f(x)$ dort einen Sprung erleidet; für jedes Zwischenintervall, in dem $f(x)$ kontinuierlich ist, findet gleichmäßige Konvergenz statt. Ein gleiches Resultat wird für die Reihe abgeleitet, die aus (2) entsteht, wenn man in ihr und in Gleichung (1) $I_v(\lambda x)$ ersetzt durch die Funktion

$$F_v(\lambda, x) = \lambda^{-v} I_v(\lambda x).$$

Zum Schluß wird noch gezeigt, daß, wenn die Reihe (2) gleichmäßig konvergiert, dasselbe auch für die Reihe gilt, die man erhält, wenn man die einzelnen Glieder von (2) mit $e^{-\lambda_n^2 \alpha^2}$ multipliziert. Die Anwendung des letzten Satzes wird an zwei Aufgaben der Wärmeleitung in einem Zylinder dargelegt.

Reviewer: Wangerin, Prof. (Halle a. S.)

Full Text: DOI