Enriques, F.; **Severi, F.**
Memoir on hyperelliptic surfaces. Part I. (Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques. (Première partie.).) (French) JFM 40.0684.01
Acta Math. 32, 283-392 (1909).

Dieser erste Teil der von der Pariser Akademie im Jahre 1907 mit dem Preis gekrönten Arbeit der beiden Verf. zerfällt in 7 Kapitel. Das erste Kapitel gibt die Definition der hyperelliptischen Fläche Φ sowie ihres Ranges r und ihres Divisors δ und beleuchtet die Rolle, welche eine gewisse von *Jacobi* konstruierte Fläche F in der Theorie der hyperelliptischen Flächen spielt, durch den Satz: Jede Fläche Φ vom Divisor δ und vom Rang r entspricht einer Involution von der Ordnung $r\delta$, die einer *Jacobi*schen Fläche angehört.

Das zweite Kapitel handelt von den hyperelliptischen Flächen vom Rang 1 (*Picard*sche Flächen). Die von *Picard* und *Humbert* entwickelte Theorie wird vom geometrischen Standpunkt aus dargestellt, und den bekannten Sätzen werden einige neue an die Seite gestellt. Die von den Verf. befolgte Methode benutzt die ıt Jacobische Fläche als Ausgangspunkt zur Konstruktion aller *Picard*schen Flächen und stützt sich auf den oben genannten Satz. Dadurch werden die charakteristischen Eigenschaften dieser Flächen in sehr einfacher Weise abgeleitet, und endlich werden die folgenden, birational verschiedenen Typen von *Picard*schen Flächen aufgestellt: 1. für $\delta > 3$ eine $\Phi_{2\delta}$ im Raum von $\delta - 1$ Dimensionen; 2. für $\delta = 3$ eine Φ_{24} im 11-dimensionalen Raum; 3. für $\delta = 2$ eine Φ_{16} im 7-dimensionalen Raum; und 4. für $\delta = 1$ eine *Jacobi*sche F_{18} im Raum von 9 Dimensionen.

Das dritte Kapitel enthält die Klassifikation der Involutionen, die zu einer *Jacobi*schen Fläche gehören, und zwar wird diese in zweierlei Hinsicht vorgenommen: 1. nach der Zahl der Transformationen, welche die Involutionen ungeändert lassen, und 2. nach der Zahl ihrer Koinzidenzen. Die eingehende Diskussion ergibt dieselbe Einteilung, welche die allgemeine Theorie der algebraischen Flächen a priori liefert, nämlich im wesentlichen die drei Fälle, welche durch die Werte $p_g - p_a = 2, 1, 0$ charakterisiert sind, wo p_g das geometrische und p_a das arithmetische Geschlecht der Fläche Φ bedeutet, welche das Bild der besagten Involution ist.

Das vierte Kapitel enthält den Beweis des folgenden, schon in Rom. Acc. L. Rend. 16_1, 443-453 (F. d. M. 38, 650, 1907, JFM 38.0650.03) aufgestellten Fundamentalsatzes: Jede hyperelliptische Fläche vom Rang $r > 1$ und vom Divisor δ entspricht einer Involution, die durch eine Gruppe von r birationalen Transformationen auf einer *Picard*schen Fläche von demselben Divisor erzeugt wird.

Das fünfte Kapitel untersucht die Flächen Φ vom Rang $r > 1$, welche von drei willkürlichen Moduln abhängen, und zeigt, daß sie stets regulär sind und auf solche vom Rang 2 zurückgeführt werden können. Für $\delta = 1$ erhält man die *Kummer*schen Flächen; für $\delta = 1$ kann Φ in eine verallgemeinerte *Kummer*sche Fläche von der Ordnung 4δ im Raum von $2\delta + 1$ Dimensionen transformiert werden. Dieselbe besitzt 16 konische Knotenpunkte und 16 singuläre Hyperebenen, welche sie je längs einer rationalen Normalkurve von der Ordnung 2δ berühren. Die Frage, ob eine gegebene Fläche hyperelliptisch vom Rang $r > 1$ ist, läßt sich auf die arithmetische Diskussion eines Systems von quadratischen Gleichungen zurückführen.

Kapitel VI behandelt die irregulären hyperelliptischen Flächen vom Rang $r > 1$. Jede solche Fläche ist elliptisch und hat die Geschlechtszahlen $p_g = 0$ und $p_a = 1$. Es wird gezeigt,daß diese Flächen den Rangzahlen 2,3,4,6 entsprechen, und daß sie nach den Werten des i-fachen Geschlechts klassifiziert werden können. Der wichtigste Satz dieses Kapitels ist der folgende: Jede Fläche vom arithmetischen Geschlecht $p_a = -1$, deren geometrisches und deren i-faches Geschlecht 0 oder 1 ist, ist eine hyperelliptische Fläche. Die verschiedenen daraus sich ergebenden Flächenfamilien werden eingehend diskutiert, und für jede wird der Wert von δ bestimmt.

Das siebente Kapitel handelt von denjenigen hyperelliptischen Flächen vom Rang $r > 1$ und vom Divisor $\delta = 1$, welche eine Parameterdarstellung durch irreduzible Thetafunktionen zulassen. Das ist für jede Fläche Φ der Fall, wenn sie das Bild einer solchen Involution auf der *Jacobi*schen Fläche ist, die durch die Transformationen einer gewissen nach *Hermite* benannten Gruppe erzeugt wird. Die Klassifikation dieser Flächen wird zurückgeführt auf die Untersuchung gewisser Kurven vom Geschlecht 2, welche eine Gruppe von Transformationen in sich besitzen. Aus der Diskussion dieser Gruppen ergibt sich, daß die genannten Flächen regulär sind, daß alle ihre Geschlechtszahlen = 1 sind (d. h. daß sie eine kanonische Kurve von der Ordnung Null besitzen), und daß sie in 11 birational verschiedene Familien zerfallen; diese sind bis auf eine (nämlich die Φ_{24}, im 13-dimensionalen Raum) in dem Referat F. d. M. 38, 650, 1907, JFM 38.0650.03 angeführt.

In einem zweiten Teil der Abhandlung sollen diese Typen weiter untersucht werden (Bericht im nächsten Band).

Reviewer: Löffler, Prof. (Schwäb. Hall)

MSC:

14J29	Surfaces of general type	Cited in **6** Reviews
14J27	Elliptic surfaces, elliptic or Calabi-Yau fibrations	Cited in **32** Documents

Full Text: DOI

References:

[1] Voir les travaux généraux deWeierstrass, et dePoincaré etPicard concernant les fonctions abéliennes de genrep; voir en particulier pourp=2 le mémoire classique deM. Appell (Journal de Math., 1891) et la note recente deM. Painlevé (Comptes rendus).

[2] Voir. p. e.Castelnouvo Rend. dell'Istituto Lombardo, s. II, t. XXV, 1892, no 8.

[3] Voir p. ex.Castelnouvo, loc. cit.Rend. dell'Istituto Lombardo XXV, 1892, no. 8.

[4] Voir le Traité dePicard etSimart (t. I, p. 86) et les remarques deSeveri dans son mémoire publié par les, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 7 Gennaio 1906.

[5] Voir la note à p. 322. · Zbl 0002.41103

[6] Voir ce Traité, t. II, p. 453–456.

[7] Voir les travaux deM. Nother et deM. Enriques, ou la note expositive deCastelxuovo etEnriques qui se tronve à la fin du "Traité des fonctions algébriques de deux variables{" dePicard etSimart.}

[8] Cfr.Enriques, Rendic. del Circolo mat. di Palermo, 1995 e Bendie. Accademia di Bologna, Decembre 1906.

[9] Atti della R. Acc. di Torino, 1893.

[10] Memorie della R. Accademia della Science di Torino, t. 51, s. II. 1903, no 23.

[11] Voir surtout:Poincaré, American Journal, t. VII. p. 316; Acta math. t. 26, p. 81,Humnert, Journal de Math. s. V, t. V (1899); t. VI (1900). etc.

[12] Voir en particulier le mémoire dans le Journal de Math., 1900, p. 313.

[13] Humbert, Journal de Math., 1893, p. 371. · Zbl 25.1247.02

[14] Appell, Journal de Math. 1891, p. 195;Humbert, ibidem, Journal de Math., 1893, p. 42–43.

[15] Enriques, Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche (Memorie dell'Acc. di Torino, s. III, t. 44, 1893). Cap. VI. – Voir aussiSeveri, Rendiconti dell'Ist. Lombardo, s. II, t. 36, 1903.

[16] Cfr.Enriques "Intorno alle superficie algebriche di genere linearep (1)=1{" Atti Accad. di Bologna (9 Dec. 1906).}

[17] Cfr.Enriques "Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero{" Circolo Matematico di Palermo (5 Marzo 1905).} · Zbl 36.0693.02

[18] Ibidem.Cfr.Enriques "Sulle superficie algebriche di genere geometrico zero{" Circolo Matematico di Palermo (5 Marzo 1905).}

[19] "Sulle superficie di genere zero{" Memorie della Società italiana delle Scienze (1896).} · Zbl 27.0523.01

[20] Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche (Annali di Matematica S. III, t. XII, 1905).

[21] Cfr.Enriques "Sulle superficie algebriche che ammettono un gruppo continuo di trasformazioni birazionali in se stesse (n. 5){" Circolo di Palermo – 14 Maggio 1905.} · Zbl 36.0693.01

[22] On appelle ainsi les surfaces admettant un groupe elliptique de transformations en elles mêmes. Après Picard etPainlevé ces surfaces ont été étudiées, notamment dans le casp g =o, parM. Enriques (Circolo di Palermo – Marzo 1905 – l. c.).

[23] Enriques, Rendiconti di Palermo, t. X, 25 Agosto 1895.

[24] Annali di Matematica, s. III, t. 6, p. 165, 1901.

[25] Comptes rendus de l'Academie des Sciences, t. XL.

[26] Journal de mathématiques (1899–1900–1901–1903, 1901–1906).

[27] Il faut tonjours prendre la valeur + 1, lersque, ainsi que nous le supposons, on a entre les parties imaginaires des périodes, l'inégalité classiqueg 1 g' 1>h 12. VoirHumbert, Journal de Math, 1990, p. 291.

[28] Autrement ces courbes seraient des courbes canoniques proprement dites (Enriques "Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche{" Accad. Torino Mem. 1893, VI) tandis queF ne renferme pas de telles courbes (Pi=1).}

[29] Cfr.Enriques {"Ricerche...{" l. c.di Geometria sulle superficie algebriche{" Accad. Torino Mem. 1893 ({\S} V, 5.).}}}

[30] Cfr.Enriques {"Ricerche...{" l. c.di Geometria sulle superficie algebriche{" Accad. Torino Mem. 1893. ({\S} III, 6.).}}}

[31] Comptes rendus: 1904, I p. 339, II p. 718: 1905, I p. 218, 931. Annales de l'École normale 1907, pg. 77.

[32] Comptes rendus: 1906, I p. 768, II p. 767. Bulletin de la Soc. Math. de France: 1907, p. 53.

[33] Cfr.Enriques, Rendiconti del circolo mat. di Palermo, 1905.

[34] Rendiconti del R. Ist. Lombardo, (2) t. 36, 1903.

[35] Nous avons déjà ce résultat dans les Atti della R. Acc. dei Lincei (séance du 5 janvier 1908).

[36] Atti della R. Acc. dei Lincei, 21 Avril 1907; n{\(\deg\)} 5.

[37] Que "toute transformation cyclique sans points unis se ramène à la formeu'=u+k,v'={\(\mu\)}v{" c'est une conséquence immédiate du théorème deM. Hamburger sur les substitutions linéaires homogènes; il suffit de se rapporter au cas où l'équation caractéristique a la racine I.}

[38] Rendiconti dei Lincei, 21 avril 1907, n0 6; Comptes rendus, 4 novembre 1907.

[39] Humbbrt, Journal de Math., 1900, p. 330.

[40] M. Humbert réserve seulement à ces transformations la dénomination de "singulières".

[41] Humbert, J. de M., 1900, p. 311.

[42] "On binary sextics with linear transformations into themselves" (American Journal of Math. t. X, 1888).

[43] Ce procédé fournit en général la relation entre les genres numériques de deux surfaces en correspondance [In], c'est-à-dire la formule deM. Severi que nous employerons dans les ch. suivants.