Hilb, E.

Über Kleinsche Theoreme in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. (German)

JFM 39.0380.04
Math. Ann. 66, 215-257 (1909).

Die vorliegende Arbeit schließt sich aufs engste an eine Abhandlung von Klein (Math. Ann. 64; F. d. M. 38, 360-361, 1907, JFM 38.0360.02) an. Unter der Annahme, daß die reellen Größen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ den Ungleichungen

$$(1)\quad a > b > c,\ 0 < \alpha < 1,\ 0 < \beta < 1,\ 0 < \gamma < 1,\ 0 < \delta < 1$$

unterworfen sind, betrachtet Verf. die Differentialgleichung

$$y'' + y'\left(\frac{1-\alpha}{x-a} + \frac{1-\beta}{x-b} + \frac{1-\gamma}{x-c}\right) + \frac{Ax+B}{(x-a)(x-b)(x-c)}y = 0,$$

welche die 4 singulären Punkte $a, b, c, d = \infty$ mit den Exponentenpaaren $(\alpha, 0), (\beta, 0), (\gamma, 0), (\delta', \delta'')$ besitzt; dabei ist

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta' + \delta'' = 2, \quad \delta'\delta'' = A, \quad \delta' - \delta'' = \delta.$$

Die beiden zu einem singulären Punkte (z. B. zu a) gehörigen Fundamentallösungen seien Y_α^a und Y_0^a; nach geeigneter Normierung der Lösungen wird

$$Y_\alpha^a = Y_\beta^b - l_1 Y_0^b, \quad Y_0^a = Y_\beta^b - l_2 Y_0^b, \quad Y_\gamma^c = Y_\beta^b - \nu_1 Y_0^b, \quad Y_0^c = Y_\beta^b - \nu_2 Y_0^b$$

gesetzt. Dabei sind l_1 und l_2 reelle Größen, dagegen $\nu_1 = n_1 e^{\pi i\beta}, \nu_2 = n_2 e^{\pi i\beta}$ (n_1, n_2 reell). Der Quotient $\eta = Y_\beta^b / Y_0^\beta$ bildet dann die von der Achse des Reellen begrenzte Halbebene auf ein auf der η-Kugel gelegenes Kreisbogenviereck $a'b'c'd'$ ab. Die 4 Raumgeraden, in denen aufeinanderfolgend die 4 die Kreisbogen enthaltenden Ebenen sich schneiden, die "Achsen des Kerns", mögen die Kugel in den Punkten a'', b'', c'', d'' zum zweiten Male schneiden dann hat η in den Punkten $(a', a''), (b', b''), (c', c'')$ die Werte: (l_1, l_2), (0∞), (ν_1, ν_2). Legt man nun die projektive Maßbestimmung zugrunde, deren Fundamentalfläche die η-Kugel ist, so gilt für die Länge φ der Seite $b'a'$ die Beziehung

$$\cos\varphi = \frac{l_1 + l_2}{l_2 - l_1};$$

ferner erhält man für die Kantenlänge auf b', b'', d. h. für die Länge der Strecke, welche von den Schnittpunkten der Achsen a', a'' und c', c'' mit b', b'' begrenzt wird:

$$\lg \frac{l_1 l_2}{n_1 n_2}.$$

Verf. untersucht nun zunächst die Abhängigkeit der Seitenlänge φ von dem Parameter B; es ergibt sich, daß B stets so bestimmt werden kann, daß die Seite $b'a'$ einen vorgeschriebenen reellen Wert annimmt, während, wenn die Seitenlänge die Form $k\pi + \psi i$ haben soll, zwar für die ganze Zahl k, aber nicht für ψ ein beliebig großer Wert vorgeschrieben werden darf. – Um zu zeigen daß durch Vorgabe einer reellen Seitenlänge B i. a. eindeutig bestimmt ist bedient Verf. sich des Verfahrens, das Klein in seinen autographierten Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen (1894), S. 379 für den Fall $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}$ entwickelt, und das für den allgemeinen Fall nur ganz wenig zu modifizieren ist. Komplizierter gestaltet sich die Behandlung der Kantenlänge, weil man alle 4 Intervalle der x-Achse nebeneinander betrachten muß wenn man den Charakter des ganzen Viereckes untersuchen will. Hierbei ist das Vorzeichen von A von ausschlaggebender Bedeutung; es gilt nämlich der Satz: Ist A positiv, so besitzt höchstens die eine der beiden nicht durch d' gehenden Seiten eine Länge mit von Null verschiedenem reellen Teile. Um also das Viereck vollständig behandeln zu können, müssen die 4 Differentialgleichungen betrachtet werden, welche entstehen, wenn nacheinander die verschiedenen singulären Punkte ins Unendliche fallen. Macht man den ins Unendliche geworfenen Punkt durch Hinzufügung eines Index an A (z. B. A_d, wenn d im Unendlichen liegt) kenntlich, so sind 3 Fälle möglich:

I. $A_a, A_b, A_c, A_d > 0$, was z. B. eintritt, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta \leqq \frac{1}{2}$;

II. $A_a, A_b, A_c < 0,\ A_d > 0$;

III. $A_a, A_b, A_c, A_d < 0$.

Der Fall I ist der wichtigste; man findet für diesen durch Anwendung der einfachsten Stetigkeitsbetrachtungen, wie man sie etwa bei der Lehre von den reellen Wurzeln reeller Gleichungen benutzt, folgenden Fundamentalsatz: "Schreibt man neben den Winkeln und den singulären Punkten der Differentialgleichung für irgend eine Kante des Kerns eine reelle Länge vor, verlangt man ferner, daß sich irgend eine Seitenlänge des Vierecks in der Form $k\pi + \psi i$ darstellen läßt, wo k eine gegebene ganze Zahl ist, so gibt es dazu mindestens einen Parameterwert B. Ist hierbei k ungerade, so gibt es mindestens 2 Kanten, welche die Eigenschaft haben, daß B auch eindeutig festgelegt ist, wenn man für eine von ihnen eine reelle Kantenlänge vorschreibt." Als Spezialfall ist hierin der Beweis für das Grundtheorem der automorphen Funktionen, und die dazu gehörigen Obertheoreme enthalten, da ja nur die Länge irgendeiner Kante verschwinden muß, damit das Viereck einen Orthogonalkreis besitzt Die Fälle II und III unterscheiden sich nur durch das Grundtheorem wesentlich von dem Falle I: Im Falle II ist zwar beim Grundtheorem der Orthogonalkreis ebenfalls reell, doch wird dieser schon hier von einer Seite und einer ihr anliegenden Seite geschnitten. Im Falle III ist beim Grundtheorem der Orthogonalkreis imaginär, man kommt auf ein gewöhnliches sphärisches Viereck , eine Tatsache, die für die Theorie der Minimalflächen von Bedeutung ist. Die Obertheoreme haben auch im Falle II und III denselben Charakter wie im Falle I.

Die Ausdehnung dieser Untersuchungen auf den Fall von n reellen singulären Punkten ist mit keinen Schwierigkeiten verbunden; ebenso kann man sich von den Ungleichungen (1) befreien, allerdings unter Aufgabe der Sätze über die Eindeutigkeit. (Siehe auch JFM 39.0380.03)

Reviewer: Wallenberg, Prof. (Berlin)

MSC:

34-XX Ordinary differential equations

Full Text: DOI EuDML

References:

[1] z. B. Klein, Zur Theorie der Laméschen Funktionen. Göttinger Nachrichten 1890. · Zbl 22.0498.01

[2] Mathematische Annalen, Band 64 (1907).

[3] H. A. Schwarz, Crelles Journal Band 75.

[4] F. Klein, Mathematische Annalen, Band 37, ferner: Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, Wintersemester 1889-90 und Sommersemester 1890, Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion, Wintersemester 1893-94, autographierte Vorlesungshefte im Verlag bei Teubner.

[5] Fr. Schilling, Mathematische Annalen, Band 44. 1894.

[6] A. Schönflies, Mathematische Annalen, Band 42 und 44. 1893, 1894.

[7] Klein, Math. Annalen, Band 9, vgl. bezüglich weiterer Ausführungen: Fricke-Klein: Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen I, Einleitung S. 4 u. f.

[8] Vgl. Klein, Hypergeometrische Funktion, Seite 343 oder auch z. B. Burkhardt, Funktionentheoretische Vorlesungen, 2. Auflage, S. 49.

[9] Diese Bedingung wurde von Herrn Klein in seiner Annalenarbeit Bd. 64, S. 187 ff. auf ganz andere Weise abgeleitet undInvolutionsbedingung genannt.

[10] Vgl. Klein l. c. Hypergeometrische Funktion, Seite 343 oder auch z. B. Burkhardt, Funktionentheoretische Vorlesungen, 2. Auflage, S. 49. Bd. 64.

[11] Eine ausführliche Literaturangabe über diesen Gegenstand findet sich in den Artikel von Herrn Bôcher über ?Randwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen?, Encyklopädie der math. Wiss. II A 7a, 1900.

[12] Math. Annalen 18, Göttinger Nachrichten 1890, vgl. auch Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen 1894. (Autographiertes Vorlesungsheft, Verlag Teubner).

[13] American Bulletin, Oktober 1898 u. April 1900.

[14] Klein, Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung, 1894, S. 379.

[15] Nach der Ausdrucksweise von Herrn Klein in den Math. Annalen Bd. 64. Das Grundtheorem deckt sich in dem Falle, daß ?, ?, ?, ? reziproke Werte ganzer Zahlen sind, mit dem sogenanntenFundamentaltheoreme der automorphen Funktionen. (Vergl. Schluß des {\S} 7.) Die Bestimmung des ParametersB für das Grundtheorem sowie für die ersten Obertheoreme wurde für den Fall ?=1/2, ?=1/2, ?=1/2 im Anschluß an die von Herrn Klein im Sommer 1907 gehaltenen Seminarvorträge von Herrn Rothe

mit Hilfe der elliptischen Funktionen rechnerisch durchgeführt. (Monatshefte für Mathematik und Physik, 19. Jahrgang, S. 258 ff.)

[16] Vergl. Klein, Math. Annalen, Bd. 64, Seite 185.