zbMATH Open
THE FIRST RESOURCE FOR MATHEMATICS

Hobson, E. W.

On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by series of normal functions. (English) JFM 39.0476.02

Lond. M. S. Proc. (2) 6, 349-395 (1908).

Verf. will für die Konvergenz von Reihen nach Eigenfunktionen hinreichende Bedingungen von solcher Allgemeinheit aufstellen, wie sie nur bei den trigonometrischen Reihen, nicht aber in den bisher entwickelten allgemeinen Theorien *(Hilbert, Kneser, Schmidt, Stekloff)* erreicht worden ist. Er geht zu diesem Ende von dem folgenden allgemeinen Konvergenztheorem aus: $f(x')$ sei im *Lebesgue*schen Sinne integrabel (aber nicht notwendig beschränkt), $F(x',x,n)$ bleibe für alle n unter endlicher Grenze, solange $|x'-x| \geqq \mu > 0$, und das Maximum von $\int_{\alpha_1}^{\beta_1} F(x',x,n)dx'$ für alle α_1,β_1 und alle x, die nur außerhalb $(\alpha_1-\mu,\beta_1+\mu)$ liegen, konvergiere mit wachsendem n gegen Null; dann ist gleichmäßig in allen diesen Werten x

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(x')F(x',x,n)dx' = 0.$$

Der Bereich der zugelassenen Werte x',x kann dabei in verschiedener Weise bestimmt, auch bei passender Modifikation der Bedingungen unendlich sein. Auf dieser Grundlage werden nun die Bedingungen dafür hergeleitet, daß auch, falls x innerhalb des Intervalles (α_1,β_1) liegt, der Grenzwert (1) gleichmäßig konvergiert und die Gestalt $Pf(x+0)+Qf(x-0)$ hat.

Eine erste Anwendung dieses Satzes auf spezielle einfache Funktionen F führt sofort zur Ausdehnung bekannter Beweise des *Weierstra ß*schen Satzes über Approximation durch Polynome auf die hier zugelassenen Funktionen $f(x')$. Weitere Anwendungen auf die trigonometrischen Reihen, insbesondere auf ihre Summation nach arithmetischen Mitteln ergeben sich unmittelbar.

Besondere Behandlung findet das Problem der Entwicklung nach Eigenfunktionen V_n einer *Sturm-Liouville*schen Differentialeleichung $\frac{d}{dx}\left(k\frac{dV}{dx}\right)+(g\lambda-l)V=0$ für ein reguläres Intervall; ist $F(x)$ in *Lebesgue*schem Sinne integrabel, so ergibt sich Konvergenz der Reihe gegen $\frac{1}{2}[F(x+0)+F(x-0)]$, falls diese Grenzwerte existieren und falls $F(x)$ in der Umgebung von x beschränkte Schwankung besitzt, und gleichmäßige Konvergenz in jedem Stetigkeitsintervall. Für den Fall singulärer Stellen werden als Typus die *Legendre*schen Polynome behandelt; als Bedingung für $F(x)$ tritt noch hinzu, daß sie in der Umgebung der singulären Stellen $x=\pm 1$ beschränkte Schwankung hat.

Reviewer: Hellinger, Dr. (Marburg)

Cited in **2** Reviews
Cited in **16** Documents

Full Text: DOI Link