Fischer, E.

Applications d'un théorème sur la convergence en moyenne. (French) JFM 38.0422.02

C. R. 144, 1148-1151 (1907).

Ist Ω die Menge aller samt ihrem Quadrate im *Lebesgue*schen Sinne integrablen Funktionen, so heißt eine Folge von Funktionen $f_1(x), f_2(x), \dots$ aus Ω "im Mittel konvergent", wenn $\lim_{m,n=\infty} \int_a^b (f_m - f_n)^2 dx = 0$. Dann gilt das für die Geometrie des Funktionenraumes Ω fundamentale Theorem: jede im Mittel konvergente Funktionenfolge konvergiert im Mittel gegen eine bestimmte Funktion von Ω, d. h. es gibt eine Funktion f in Ω, so daß $\lim_{n=\infty} \int_a^b (f - f_n(x))^2 dx = 0$. Es konvergiert nämlich notwendig $\int_a^x f_n(x) dx$ gegen eine stetige Funktion von beschränkter Schwankung, und eine von ihren vier Derivierten ist, wie sich aus Eigenschaften der *Lebesgue*schen Integrale ergibt, die fragliche Funktion f. Hierin ist der *Riesz*sche Satz (vgl. das vorangehende Referat (JFM 38.0421.01)) mit enthalten, den *Riesz* unabhängig vom Verf. und etwa gleichzeitig mit ihm gefunden hat: Die Reihe $\sum_{(p)} a_p \varphi_p(x)$ konvergiert stets im Mittel, wenn $\sum_{(p)} a_p^2$ konvergiert, und liefert so eine Funktion $f_0(x)$, deren Fourierkoeffizienten nach dem Orthogonalsystem der $\varphi_p(x)$ die a_p sind. Sind die $a_p = \int_a^b f(x) \varphi_p dx$ angenommen. So kann dieses f_0 von f verschieden sein, und zwar stellt es die f "im Mittel nächste" der mit $\varphi_1, \varphi_2 \dots$ "erreichbaren" Funktionen von Ω dar, d. h. der Funktionen, denen man mit Aggregaten aus endlich vielen φ_p im Mittel beliebig nahe kommen kann (unter mittelerer Entfernung zweiter Funkitionen stets das Integral des Quadrats ihrer Differenz verstanden). Ein Orthogonalsystem ist "vollständig" oder "abgeschlossen" (vgl. das vorangehende Referat, JFM 38.0422.01), wenn jede Funktion von Ω mit ihm erreichbar ist; jedes nicht vollständige Orthogonalsystem kann man durch Adjunktion neuer Orthogonalfunktionen zu einem vollständigen ergänzen. – Von den weiteren Anwendungen des allgemeinen Konvergenztheorems sei noch der Satz hervorgehoben, daß eine stetige Funktion $F(x)$ dann und nur dann das Integral einer Funktionen aus Ω ist, wenn der Differenzenquotient $\frac{1}{2\delta}(F(x+\delta) - F(x-\delta))$ im Limes $\delta = 0$ im Mittel konvergiert. – Endlich wird noch gezeigt, daß die Verwendung der *Lebesgue*schen Begriffe für diese Sätze notwendig ist, da sie bei Beschränkung auf stetige Funktionen z. B. nicht gelten.

Reviewer: Hellinger, Dr. (Marburg)

Full Text: Gallica