von Koch, H.
Remarques sur quelques séries de polynomes. (French) JFM 37.0280.01
S. M. F. Bull. 34, 269-274 (1906).

Die Gleichung $|x^2-1|=1$ stellt, wenn x einen Punkt der komplexen Ebene bedeutet, eine *Bernoulli*sche Lemniskate dar mit den Polen $x=-1$ und $x=+1$. Der Doppelpunkt $x=0$ teilt die Lemniskate in die beiden Teile A und B, welche die Punkte $+1$ und -1 umgeben.

Die im Innern von A reguläre analytische Funktion $f(x)$ geht durch die Substitution $z=1-x^2$, $x=\sqrt{1-z}=1-\frac{1}{2}z+\cdots$ in eine in der Umgebung von $z=0$ reguläre Funktion von z über, deren *Taylor*sche Entwicklung $c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots$ sei, sie konvergiert für $|z|<1$; daher konvergiert die Reihe $c_0+c_1(1-x^2)+c_2(1-x^2)^2+\cdots$ im Innern von A und stellt dort $f(x)$ dar; sie konvergiert auch im Innern von B, stellt aber dort im allgemeinen nicht $f(x)$ dar, sondern nur, wenn $f(x)$ analytisch fortsetzbar ist und die Bedingung $f(x)=f(-x)$ erfüllt.

Im Anschluß hieran wird eine Reihe von Polynomen gebildet, die verschiedene Funktionen in verschiedenen Punkten der Ebene darstellt: 1. Die Reihe $f(x)=1/x=1:\sqrt{1-z}=1+\sum_{\nu-1}^{\infty}\frac{2\nu!}{(\nu!)^2}\frac{z^\nu}{2^{2\nu}}$ konvergiert im Innern der ganzen Lemniskate, hat im Innern von A den Wert $1/x$, dagegen im Innern von B den Wert $-1/x$. Das zweite Beispiel ist der Zweig von $\log x$, der für $x=1$ verschwindet und durch einen Schnitt vom Nullpunkt längs der negativen imaginären Achse eindeutig gemacht ist; dann folgt aus $\log x=\log\sqrt{1-z}=-\frac{1}{2}(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots)$, daß die Reihe $1-x^2+\frac{(1-x^2)^2}{2}+\frac{(1-x^2)^3}{3}+\cdots$ in beiden Teilen der Lemniskate konvergiert und $-2\log x$ im Innern von A, dagegen $-2\log x+2\pi i$ im Innern von B darstellt.

Schließlich wird eine Reihe gebildet, die in einer beliebig kleinen Umgebung eines beliebigen Punktes im Innern des Kreises $|x|=1$ nach und nach eine unendliche Zahl von verschiedenen analytischen Funktionen, nämlich $\log x+\varphi i$ (wo φ in rationalem Verhältnis zu 2π steht) darstellt.

Reviewer: Weltzien, Prof. (Zehlendorf)

Full Text: DOI Numdam EuDML