Bliss, G. A.; Mason, M.

A problem in the calculus of variations in which the integrand is discontinuous. (English)

JFM 37.0402.01
American M. S. Trans. 7, 325-336 (1906).

In dieser Abhandlung wird das folgende Problem behandelt: Unter allen Kurven $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, die zwei auf verschiedenen Seiten einer festen Kurve L gegebene Punkte 1 und 3 miteinander verbinden und die Kurve L nur einmal schneiden, ist die Kurve C zu bestimmen, welche die Summe der beiden Integrale

$$J = \int F(x, y, x', y')\, dt, \quad j = \int f(x, y, x', y')\, dt,$$

wenn das erste Integral von dem festen Punkt 1 bis zum Schnittpunkte 2 von C mit L und das zweite von diesem Punkte 2 bis zu dem festen Punkte 3 erstreckt wird, zu einem Minimum macht.

Als notwendige Bedingungen ergeben sich die folgenden vier, deren erste drei sich aus den bekannten Bedingungen für das gewöhnliche Problem der Variationsrechnung leicht ableiten lassen, während die vierte (*Jacobi*sche) Bedingung geometrisch bewiesen wird.

1. C_{12} muß eine Extremale für das Integral J und C_{23} eine Extremale für das Integral j sein.

2. Die Funktionen

$$F_1 = \frac{1}{y'^2} F_{x'x'} = -\frac{1}{x'y'} F_{x'y'} = \frac{1}{x'^2} F_{y'y'}, \quad f_1 = \frac{1}{y'^2} f_{x'x'} = -\frac{1}{x'y'} f_{x'y'} = \frac{1}{x'^2} f_{y'y'}$$

müssen längs C_{12}, bzw. C_{23} positive Werte haben.

3. Die Richtungswinkel $\mathit{\Gamma}, \gamma, \theta$ der Tangenten der Extremalen C_{12}, C_{23} und der Kurve L in ihrem Schnittpunkte $2(x_2, y_2)$ müssen die Gleichung erfüllen:

$$\begin{aligned} &F_{x'}(x_2, y_2, \cos\mathit{\Gamma}, \sin\mathit{\Gamma}) \cos\theta + F_{y'}(x_2, y_2, \cos\mathit{\Gamma}, \sin\mathit{\Gamma}) \sin\theta \\ &\quad = f_{x'}(x_2, y_2, \cos\gamma, \sin\gamma) \cos\theta + f_{y'}(x_2, y_2, \cos\gamma, \sin\gamma) \sin\theta. \end{aligned}$$

4. Die Extremalbogen C_{12} und C_{23} dürfen keine zu ihren Anfangspunkten 1 und 2 konjugierten Punkte enthalten, und die Enveloppe der Extremalen $C_{2'4'}$ darf den Bogen C_{23} nicht zwischen den Punkten 2 und 3 berühren. Hier bezeichnet $2'$ den Punkt, in dem irgendeine von 1 ausgehende Vergleichsextremale die Kurve L schneidet, und $C_{2'4'}$ die von dem Punkte $2'$ ausgehende Extremale des Integrales j. Es bestimmt nämlich dieeinparametrige Schar von Extremalen $C_{12'}$ des Integrals J, die von dem Punkte 1 ausgehen, eine einparametrige Schar von Extremalen des Integrales j, deren Anfangspunkte die Punkte $2'$ auf L sind.

Faßt man diese vierte Bedingung insofern schärfer, als man auch den Fall ausschließt, in dem die Enveloppe der Extremalen $C_{2'4'}$ den Bogen C_{23} in dem Punkte 3 selbst berührt, so ist sie im Verein mit den drei ersten notwendigen Bedingungen auch hinreichend, damit die Kurve C_{123}, die L nur einmal schneidet, und deren Tangenten in 2 nicht beide mit der Tangente von L in diesem Punkte zusammenfallen, die Summe der beiden Integrale J und j zu einem Minimum macht.

Reviewer: Haussner, Prof. (Jena)

MSC:

49K05 Optimality conditions for free problems in one independent variable

Keywords:

field of extremals; envelope

Full Text: DOI