Raffy, L.

Recherches sur les surfaces isothermiques. (French) JFM 37.0628.02

Ann. de l'Éc. Norm. (3) 23, 387-428 (1906).

Fortsetzung der Arbeit des Vorjahrs (F. d. M. 36, 673, 1905, JFM 36.0673.01). Der Verf. beschäftigt sich hauptsächlich mit dem Studium der partiellen Differentialgleichung, von deren Integration die Bestimmung aller isothermen Flächen abhängt. Den Ausgangspunkt bildet (vgl. *Raffy*, Sur la recherche des surfaces isothermiques C. R. 140, 1672-1674; F. d. M. 36, 672, 1905, JFM 36.0672.04) die *Bonnet*sche Gleichung des Deformationsproblems. Sind α, β Parameter der Minimallinien, $\xi = x + iy$ eine isotrope Koordinate und

$$ds = 2\varphi(\alpha, \beta)\sqrt{d\alpha\, d\beta}$$

das Linienelement einer Fläche, so lautet die *Bonnet*sche Gleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{t}{2q}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} - \frac{2}{2p}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \frac{rt - s^2}{4pq}\cdot\varphi = 0,$$

unter $p, q, \dots, t$ in üblicher Bezeichnungsweise die partiellen Ableitungen von ξ nach α, β verstanden. Der Verf. behandelt, zunächst unabhängig von der Bedingung der Isotherme, diese Gleichung als partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung nach der *Laplace-Darboux*schen Methode; $h, h_1, \dots, k, k_{-1}, \dots$ seien die Invarianten der Gleichung. Man führe noch die Größe $\tau = s^2/4pq$ ein, so ist τ eine Invariante der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\sqrt{p}}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{\partial\log\sqrt{\tau}}{\partial\alpha}\frac{\partial\sqrt{p}}{\partial\beta} - \tau\sqrt{p} = 0.$$

Mit $\tau_1, \tau_2, \dots$ seien die folgenden Invarianten bezeichnet. Zwischen ihnen und den Invarianten h, k bestehen gewisse Zusammenhänge.

Flächen der Beschaffenheit, daß die Differentiale ihrer Koordinaten sich mit Hülfe willkürlicher Funktionen von α und β ausdrücken lassen, nennt der Verf. Flächen erster Klasse. Ist $\tau_n = 0$, so heißen sie: vom Range n. Diese teilt der Verf. wieder ein in drei verschiedene Arten, jenachdem von den Invarianten h_n und k_{-n} beide verschwinden oder nur eine oder keine. Diese allerdings etwas gekünstelt erscheinende Einleitung erleichtert das Studium der Isothermflächen nach der Methode des Verf.

Die Bedingung der Isothermie lautet

$$\frac{1}{A_0(\alpha)}\cdot\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{p}{\varphi^2}\right) = \frac{1}{B_0(\beta)}\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{q}{\varphi^2}\right),$$

worin A_0, B_0 willkürliche Funktionen ihrer Argumente bedeuten. In Verbindung mit der *Bonnet*schen Deformationsgleichung ergibt sich daraus die Differentialgleichung der Isothermflächen:

$$q\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{pk}{A_0 q}\right) = p\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{qh}{B_0 p}\right),$$

worin h, k die oben definierten Invarianten sind.

Die weiteren Untersuchungen beziehen sind nun auf die einzelnen oben bezeichneten Flächenklassen; es ergeben sich, je nach den speziellen Annahmen, die schon früher behandelten Isothermflächen (die Minimalflächen, die *Thybaut*schen Flächen und ihre Inversen, die *Bonnet*schen Flächen).

Eine weitere Fortsetzung der Arbeit steht in Aussicht.

Reviewer: Rothe, Prof. (Klausthal)

Full Text: DOI Numdam EuDML