de Séguier, J. A.

Théorie des groupes finis. Éléments de la théorie des groupes abstraits. (French)

JFM 36.0187.02
Paris. Gauthier-Villars. 176 S. (1904).

Mag auch, um mit *Poincaré* zu sprechen, die Idee des Gruppenbegriffes implizit so alt wie der mathematische Gedanke sein, so hat sie sich doch zuerst bei der Behandlung algebraischer Gleichungen klar und deutlich dargeboten. Die Permutationsgruppen bilden daher den Ausgangspunkt der Gruppentheorie. *Lagrange, Ruffini, Cauchy, Abel* und *Galois* sind die Begründer der Disziplin, und *C. Jordan*s fundamentaler Traité des substitutions et des équations algébriques bedeutet für sie einen Markstein. Die Erkenntnis, daß bei einer Gruppe nicht die Art der Darstellung der Symbole, sondern das Gesetz für ihre Kombination den springenden Punkt bildet, die Prinzipien der Theorie der Permutationsgruppen also einem abstrakteren, allgemeineren Gedankenkreise angehören, ist wohl am frühesten von *Cayley* und *Kronecker* ausgesprochen worden.

Wieviel auch die Theorie der Permutationgruppen Frankreichs Forschern zu verdanken hat, so kann man nicht behaupten, daß die abstrakte Gruppentheorie, die vornehmlich von englisch und deutsch sprechenden Gelehrten ausgebaut wurde, die französischen Mathematiker besonders angezogen hat. Um so erfreulicher ist es, ein von einem französischen Gelehrten geschriebenes Werk der abstrakten Gruppentheorie anzeigen zu können. Der vorliegende erste Teil behandelt unter dem Titel "Éléments" ausschließlich die abstrakte Gruppentheorie, ohne von der Natur der Elemente irgend welchen Gebrauch zu machen. Ein zweiter Teil, in dem auch die Permutationsgruppen verwendet werden sollen, wird unter dem Titel "Compléments" erscheinen. Auf den ersten sechs Seiten erfahren die Mengen nach *G. Cantor* eine kurze Behandlung, um sie in endliche und unendliche einzuteilen. Hierauf definiert der Verf. die Gruppe als eine besondre Gattung eines corps. Unter einem corps wird von *de Séguier* durchgehend eine Menge von endlich oder unendlich vielen Elementen verstanden, die miteinander nach einer derartigen Vorschrift komponiert werden können, daß für irgend drei Elemente stets das assoziative Prinzip erfüllt ist. Kommen zu diesem Postulat des assoziativen Charakters noch die zwei weiteren hinzu, daß zu irgend zwei Elementen a und b des corps stets in ihm erstens ein Element x existieren soll, daß $ax = b$ wird, und zweitens in ihm ein Element y vorhanden sein soll, daß $ya = b$ wird, so ist der corps eine Gruppe im üblichen Sinne. Die Abgeschlossenheit ihrer Elemente in bezug auf die Komposition erscheint dann als beweisbarer Lehrsatz. Dies ist die erste von *Huntington* (Bulletin American M. S. *8*, 296) gegebene Gruppendefinition durch drei unabhängige Postulate. *De Séguier* setzt übrigens nicht voraus, daß a alle Elemente des corps durchläuft; es genügt, daß für a alle erzeugenden Elemente des corps gesetzt werden, d. h. alle diejenigen, durch deren Komposition sämtliche Elemente des corps entstehen. An Stelle der gegebenen Definition würde man gegenwärtig wohl zweckmäßiger eine auch von *Huntington* in einem neueren Aufsatze (Transactions American M. S. *6*, 183, 1905), als "more convenient" bezeichnete Definition von *Moore* durch unabhängige Postulate treten lassen. Ich würde sie in der *Dickson*schen Form (Transactions American M. S. *6*, 199, 1905) wählen. Nach ihr wird ein corps eine Gruppe, wenn außer dem Postulat der Assoziativität (I) noch die folgenden drei Postulate gelten:

II. Das Produkt irgend zweier Elemente des corps ist ein ihm angehöriges eindeutig bestimmtes Element.

III. Der corps enthält wenigstens ein rechtshändiges Einheitselement i, so daß für jedes Element des corps die Gleichung $ai = a$ gilt.

IV. Existieren derartige Einheitselemente i, so soll für ein besonderes i und jedes a des corps die Gleichung $ax = i$ innerhalb des corps lösbar sein.

Die drei vom Verf. angegebenen *Huntington*schen Postulate zur Definition einer Gruppe sind ebenso wie die vier *Moore-Dickson*schen voneinander unabhängig, d. h. keines von ihnen ist aus den anderen als beweisbarer Lehrsatz herleitbar. Fügt man zu den drei *Huntington*schen oder den vier *Moore-Dickson*schen Postulaten noch das weitere, daß der corps nur die endliche Anzahl n von Elementen besitzen soll, so wird durch die Hinzunahme des weiteren Postulats die Unabhängigkeit nicht gestört. Um dies nachzuweisen, reichen *de Séguiers* Betrachtungen nicht aus; vielmehr wäre die Unabhängigkeit der Postulate bei der Voraussetzung, daß der corps n Elemente enthalten soll, etwa nach *Huntington* zu erweisen. Der Zusatz “abélien” auf S. 8, Z. 10 von unten bei dem Nachweis der Unabhängigkeit der drei Postulate und der Satz “Cette condition est toujours remplie si G est abélien” (S. 7, Z. 12) widersprechen sich; beide zitierten Stellen sind zu streichen.

Sehr eingehend untersucht Verf. die Definition einer Gruppe durch ein System von Gleichungen. Hieran schließt sich eine kürzere Betrachtung der rationalen und irrationalen Zahlen, die sich sowohl in bezug auf additive, als auch auf multiplikative Verknüpfung als Gruppen auffassen lassen. Der Schluß des ersten Kapitels behandelt sehr gründlich den endlichen *Galois*schen Körper. Des Verf. Ausgangspunkt ist ein *Abel*scher corps C, dessen Elemente auf zwei Arten verknüpfbar sind. In bezug auf die erste Art der Verknüpfung, die als Addition bezeichnet wird, ist C eine additive Gruppe. Ihre Einheit sei mit 0 bezeichnet. Für die zweite Art der Komposition, die Multiplikation heiße, soll $C-0$ (d. h. C mit Ausschluß der Einheit der additiven Gruppe) ebenfalls eine Gruppe sein. Für irgend welche x und y in C soll $x\cdot 0=0\cdot x=0$ sein; hieraus folgt, daß, wenn $xy=0$ ist, entweder $x=0$ oder $y=0$ ist. Schließlich soll die Multiplikation in bezug auf die Addition distributiv sein. Ein derartiger corps heißt nach allgemeinem Gebrauch ein Körper oder Feld (champ). Abstrakte Definition für einen Körper oder ein Feld gehen auf *H. Weber* (Math. Annalen *43*) und *E. H. Moore* zurück. Die Frage nach Definition eines Körpers durch voneinander unabhängige Postulate wird gegenwärtig von *Dickson* und *Huntington* (Transactions American M. S. *4*, 1903 und *6*, 1905) eifrig studiert. Die Worte des Verf.: “Les postulats qui le (le champ) caractérisent sont évidemment indépendants” (S. 27) sind unzulänglich. Enthält C nur eine endliche Anzahl von Elementen, so hat man nach einem *Moore*schen Satze einen endlichen *Galois*schen Körper, dessen Ordnung eine Primzahlpotenz ist.

Kap. II behandelt die Untergruppen, ihre Zerlegung nach einem einfachen oder einem Doppelmodul, den Homomorphismus, die *Sylow*schen Sätze, Kompositions- und Hauptreihen einer Gruppe, schließlich die zerlegbaren Gruppen. Im Zusammenhang mit der Kompositionsreihe beschäftigt sich Verf. eingehend mit dem von ihm sogenannten “groupe spécial.” Auf S. 89 muß ihre Charakterisierung lauten: “Si tout groupe facteur A_{i-1}/A_i $(A_0=G)$ d’une seule série principale $G,A_1,A_2,\dots,A_r=1$ d’un groupe G a ses éléments normaux dans G/A_i, G est spécial.” Ebenso ist auf S. 89, Z. 9 “dans G” in “dans G/B” zu ändern. Die vom Verf. sogenannte spezielle Gruppe ist auch sonst in der Literatur aufgetreten (*W. Burnside*, theory of groups of finite order, S. 115). Eine charakteristische Eigenschaft für sie ist ferner noch, daß sich jede ihrer Untergruppen in eine Kompositionsreihe einordnen läßt (vgl. des Ref. Aufsatz in den Math. Annalen Bd. *55*, 67).

Das dritte Kapitel ist den *Abel*schen Gruppen gewidmet. Wie überall werden auch hier, obgleich die endlichen Gruppen der vornehmlichste Gegenstand der Untersuchung sind, die unendlichen in den Kreis der Betrachtung gezogen. Die vom Verf. (S. 98) untersuchten unendlichen Abelschen Gruppen, die eine Basis besitzen und keine Elemente unendlicher Ordnung enthalten, hat übrigens auch *H. Weber* (Math. Ann. *48*, 439) betrachtet.

Das Schlußkapitel gilt der eingehenden Behandlung der Gruppen von Primzahlpotenzordnung. Zu ihrer Charakterisierung bedient sich der Verf. des Begriffes, “figure”, den er auf folgende Weise definiert: “$1,A_1,A_2,\dots,A_n=G$ étant une série spéciale du $g_{p^m}=G$ et A_i/A_{i-1} ayant le type $(a_i,b_i,\dots)$ (117, non 115), je dirai que le symbole $(a_1,b_1,\dots),(a_2,b_2,\dots),\dots$ est la figure de G” (S. 113). Die Reihe $1,A_1,A_2,\dots A_n=G$ heißt eine Spezialreihe, wenn die Faktorgruppe A_i/A_{i-1} le central von G/A_{i-1} ist (S. 87). Gruppen, die eine Spezialreihe besitzen, sind identisch mit den oben erwähnten speziellen Gruppen. Die Gesamtheit invarianter Elemente einer Gruppe nennt Verf. le central der Gruppe (S. 57). Der Typus $(k_1,k_2,\dots,k_\varrho)$ einer *Abel*schen Gruppe von Primzahlpotenzordnung p^k bedeutet in üblicher Weise die Ordnungen $p^{k_1},p^{k_2},\dots p^{k_\varrho}$ der ϱ erzeugenden Elemente eines Basissystems. Ich habe hier an einem Beispiel eine Reihe vom Verf. neu eingeführter Bezeichnungen vorgeführt.

Hoffentlich wird der zu erwartende zweite Teil zur bequemeren und leichteren Orientierung einen ausführlichen Index bringen. Durch die zahlreichen neuen Namen und eine kurze Ausdruckweise hat Verf. auf dem geringen Raume ein sehr großes Material zusammengetragen. Zwar sind die benutzten Hülfssätze, wenn sie sich darboten, bewiesen; trotzdem hat *de Séguier*, wie mir scheint, infolge der knappen und kondensierten Datstellung mehr ein Handbuch als ein zur Einführung bestimmtes Lehrbuch geschaffen. Die neueste Literatur ist dem Verf. wohl bekannt und von ihm auf das geschickteste benutzt worden. In zwei beigefügten Noten werden die Bewegungsgruppen sowie Elementarteiler, lineare Gleichungen und lineare Kongruenzen behandelt.

Reviewer: Loewy, Prof. (Freiburg i. B.)

Full Text: Link