Landau, E.

On some inequalities in the theory of Riemann zeta function. (Sur quelques inégalités dans la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.) (French) JFM 36.0263.03

S. M. F. Bull. 33, 229-241 (1905).

Mellin hat für die ζ-Funktion die Relationen bewiesen:

$$|\zeta(\sigma+ti)| = O(t^{1-\sigma}), \quad \text{wenn} \quad 0<\sigma<1,$$
$$|\zeta(\sigma+ti)| = O(\lg t), \quad \text{wenn} \quad \sigma=1,$$

wo σ, t Variabeln sind und $O(g(t))$ eine Funktion ist, für die

$$\lim_{t=\infty} \frac{O(g(t))}{g(t)}$$

zwischen endlichen Grenzen bleibt. Diese Betrachtung hat *Mellin* verfeinert, indem er noch die folgende Relation hinzufügte:

$$|\zeta(\sigma+ti)| = O(\sqrt{t}), \quad \text{wenn} \quad 0<\sigma<\tfrac{1}{2}.$$

Dem Verf. gelingt es, diese *Mellin*schen Relationen durch die beiden folgenden, noch genaueren, zu ersetzen:

$$|\zeta(\sigma+ti)| = O(t^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sigma}\sqrt{\lg t}), \quad \text{wenn} \quad 0<\sigma\leqq\tfrac{1}{2},$$

$$|\zeta(\sigma+ti)| = O(t^{\frac{3}{4}(1-\sigma)}\sqrt{\lg t}), \quad \text{wenn} \quad \tfrac{1}{2}\leqq\sigma<1.$$

Zum Beweise wird wesentlich in den auftretenden Reihenentwicklungen der *Voronoï*sche Satz über die Funktion

$$\tau(x) = \sum_{n=1}^{x} \left[\frac{x}{n}\right]$$

angewendet, daß nämlich

$$\tau(x) = x\lg x + (2C-1)x + O(\sqrt[3]{x}\lg x).$$

Im letzten Abschnitt beweist der Verf. für die Funktion

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{x} \{\mu(n)\}^2$$

die Beziehung:

$$Q(x) = \frac{6}{\pi^2}\,x + O\left(\frac{\sqrt{x}}{\lg\lg x}\right).$$

Reviewer: Fueter, Prof. (Basel)

MSC:

11M06 $\zeta(s)$ and $L(s,\chi)$

11N25 Distribution of integers with specified multiplicative constraints

Cited in **1** Review

Keywords:

the order of $\zeta(s)$ in the critical strip; distribution of squarefree numbers

Full Text: DOI Numdam EuDML