Bes, K.

Décomposition de la forme ternaire du troisième degré. (French) JFM 35.0136.02

Math. Ann. 59, 77-83 (1904).

Der Verf. geht von folgendem (geometrisch evidenten) Prinzip aus.

Eine ternäre Form dritter Ordnung $u = a_1x^3 + a_2x^2y + \cdots + a_{10}z^3$ ist irreduzibel, wenn die Gleichung $u = 0$ keine oder höchstens eine Lösung "zweiter Ordnung" zuläßt, d. h. eine Lösung, die zugleich den drei abgeleiteten Gleichungen $u_x = 0, u_y = 0, u_z = 0$ genügt. Die Form u zerfällt in zwei Faktoren (von erster und zweiter Ordnung), wenn $u = 0$ zwei Lösungen zweiter Ordnung gestattet. Endlich zerfällt u in drei Linearfaktoren, wenn $u = 0$ drei Lösungen zweiter Ordnung besitzt.

Von hier aus lassen sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Eintreten der drei erwähnten Fälle herleiten.

Die drei abgeleiteten Gleichungen (1) $u_x = 0$, $u_y = 0$, $u_z = 0$ lassen höchstens eine einzige gemeinsame Lösung zu, wenn wenigstens eine Determinante einer gewissen, vom Verf. früher untersuchten Matrix von Null verschieden ist (F. d. M. 32, 99, 1901, JFM 32.0099.03; 33, 173, 1902, JFM 33.0173.01). Sind z. B. alle diese Determinanten von Null verschieden, während die Resultante von $u_x = 0$, $u_y = 0$, $u_z = 0$ verschwinden soll, so besitzen diese Gleichungen eine gemeinsame Lösung vermöge der linearen Gleichungen (2) $-p_{10}y + p_9z = 0$, $-p_{10}x + p_6z = 0$, wo unter p_{10}, p_9, p_6 die bereits durch die a ausgedrückten Potenzprodukte z^3, yz^2, xz^2 bedeuten, oder auch durch andere analoge Gleichungen.

Verschwinden dagegen alle Determinanten der Matrix, so besitzen die Gleichungen (1) wenigstens zwei gemeinsame Lösungen, während die Gleichungen (2) illusorisch werden, und umgekehrt. Die Gleichungen (1) sind dann an eine lineare Identität gebunden: (3) $(s_1x + s_2y + s_3z)\ u_x + (s_4x + s_5y + s_6z)\ u_y + (s_7x + s_8y + s_9z)\ u_z \equiv 0$, wo die s gewisse Determinanten der obigen Matrix bedeuten. Sind gerade zwei gemeinsame Lösungen von (1) vorhanden, so bestimmen sich dieselben durch Gleichungen von der Form:

$$(4) \quad p_{9,10}y^2 + p_{8,10}yz + p_{8,9}z^2 = 0,\ -p_{9,10}x + p_{7,10}y + p_{7,9}z = 0,$$

wo unter den p wiederum gewisse Determinanten der Matrix zu verstehen sind; die Form u zerfällt dann in einen Faktor ersten und einen zweiten Grades.

Verschwinden alle Determinanten einer gewissen zweiten Matrix, was fünf Bedingungen gleichkommt, so besitzen die Gleichungen (1) drei gemeinsame Lösungen, während die Gleichungen (4) illusorisch werden, und umgekehrt. Zwischen den Gleichungen (1) bestehen dann zwei lineare Identitäten von der Art (3). Für die drei gemeinsamen Lösungen von (1) erhält man zunächst drei quadratische Gleichungen in x, y, z, aus denen aber ohne weiteres eine kubische Gleichung in y/z fließt. Die Koeffizienten in (4) erhalten sämtlich einen (verschwindenden) gemeinsamen Faktor vierten Grades.

Reviewer: Meyer, F., Prof. (Königsberg i. Pr.)

Full Text: DOI EuDML

References:

[1] La décomposition de la forme ternaire du troisième degré en facteurs linéaires a été traitée par Brioschi (Annali di Matematica, serie II, tome VII, pag. 189), par A. Thaer (Mathematische Annalen, tome XIV, pag. 545), par A. Brill (Mathematische Annalen, tome L, pag. 180).

[2] Le lecteur est prié de consulter les mémoires de l'auteur sur la théorie de l'élimination dans les ?Verhandelingen der Koninklyke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam?, tome VI no 7, tome VIII no 1, 2 et 6, intitulés:

[3] Théorie générale de l'élimination d'après la méthode Bezout suivant un nouveau procédé (1899),

[4] L'équation finale (1901),

[5] Les systèmes de racines d'un système den équations homogènes àn+1 variables (1902).

[6] La dépendance ou l'indépendance d'un système d'équations algébriques (1904).

[7] Comparer: A. Thaer, Über die Zerlegbarkeit einer ebenen Linie dritter Ordnung in drei gerade Linien (Math. Annalen, Bd.

14, pag. 545) et A. Brill, Über die Zerfällung einer Ternärform in Linearfactoren (Math. Annalen, Bd. 50, pag. 157). · Zbl 11.0088.02