Riquier, Ch.
Sur l'existence, dans certains systèmes différentiels, des intégrales répondant à des conditions initiales données. (French) JFM 35.0326.01
Ann. de l'Éc. Norm. (3) 21, 297-373 (1904).

Die Resultate der vorliegenden Arbeit (vgl. C. R. 136, 80-81; F. d. M. 34, 352, 1903, JFM 34.0352.01) können folgendermaßen zusammengefaßt werden: Es seien:

$$x,y,\dots,$$
$$u,v,\dots$$

Benennungen (in endlicher Anzahl), von denen die ersteren verschiedene unabhängige Veränderliche, die letzteren verschiedene unbekannte Funktionen dieser Veränderlichen bezeichnen. Jeder der Größen

$$x,y,\dots,\,u,v,\dots$$

wird eine ganze Zahl zuerteilt, welche positiv, Null oder negativ sein kann und die Nummer (cote) dieser Größe genannt wird; die Nummer der r-ten Ableitung einer der Funktionen u, v, ... ist dann diejenige Zahl, welche man erhält, indem man zur Nummer der Funktion die Nummern der r Veränderlichen, nach denen differenziert worden ist, addiert. In dem Falle, wo die Nummern der verschiedenen unabhängigen Veränderlichen alle gleich 1 sind, erhält man also die Nummer irgend einer Ableitung, indem man zur Nummer der unbekannten Funktion die Totalordnung der Ableitung hinzufügt.

Ist ferner ein Differentialsystem gegeben, welches in bezug auf gewisse Ableitungen der unbekannten Funktionen, die darin vorkommen, aufgelöst ist, so soll eine Ableitung dieser Funktionen "Hauptableitung" heißen, wenn sie mit irgend einer linken Seite der Gleichungen des Systems oder mit einer ihrer Ableitungen übereinstimmt; im entgegengesetzten Falle heißt sie "parametrische Ableitung". Verf. betrachtet nun ein Differentialsystem, welches folgenden beiden Bedingungen genügt: 1. Das System ist in bezug auf gewisse Ableitungen der unbekannten Funktionen, die darin vorkommen, aufgelöst, und wenn man die Gleichungen in Gruppen teilt, je nachdem ihre linken Seiten zu der oder jener unbekannten Funktion gehören, so enthält keine der so erhaltenen Gruppen mehr als eine Gleichung. 2. Die rechten Seiten sind von jeder Hauptableitung unabhängig, und wenn man sämtlichen unabhängigen Veränderlichen die Nummer 1 und den unbekannten Funktionen bezügliche bestimmte Nummern zuweist, so enthält jede rechte Seite außer den unabhängigen Veränderlichen nur solche Größen (unbekannte Funktionen oder ihre Ableitungen), deren Nummern diejenigen der entsprechenden linken Seite nicht übersteigen. Wenn ein System dieser Art gegeben ist, so ist die hinreichende Bedingung dafür, daß die hypothetischen Integrale, welche gegebenen Anfangsbedingungen entsprechen, wirklich existieren, die, daß gewisse Funktionen (in endlicher Anzahl) der unabhängigen Veränderlichen, der unbekannten Funktionen und einiger ihrer parametrischen Ableitungen für die numerischen Anfangswerte ihrer Argumente absolute Beträge besitzen, die gewissen Ungleichungen genügen. Z. B. für die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x}\partial y = f\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

lautet diese Bedingung, wenn A und B die partiellen Ableitungen von f in bezug auf $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ und A_0, B_0 die numerischen Anfangswerte von A und B bedeuten:

$$\operatorname{mod}\,(A_0B_0) < \frac{1}{4}.$$

Dieselbe ist viel weniger beschränkend als die bisher von Picard, Goursat, Méray und dem Verf. selbst gefundenen Bedingungen.

Reviewer: Wallenberg, Prof. (Charlottenburg)

Full Text: DOI Numdam Numdam EuDML