König, J.

Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen. (German) JFM 34.0093.02

Leipzig: B. G. Teubner. X u. 552 S. 8° (1903).

Die von *Kronecker* in seiner Festschrift vom Jahre 1882 geschaffene und daselbst schon in ihrem ganzen Umfange skizzierte, dann namentlich durch die Arbeiten von *Hilbert* und *Hensel* weiter fortgeführte Theorie der algebraischen Größen systematisch darzustellen und auf diese Weise "den Geist der *Kronecker*schen Methoden zu popularisieren", ist der Zweck des vorliegenden verdienstvollen Buches. Der Verf. setzt nur die ersten Elemente der Algebra und Zahlentheorie als bekannt voraus, entwickelt aber die Theorie bis zu den neuesten Fortschritten und flicht insbesondere eine Reihe eigener, noch nicht publizierter Untersuchungen in seine Darstellung hinein. Zugrunde legt er all seinen Entwicklungen die Definition der "holoiden" und "orthoiden" Bereiche, die den Integritäts- und Rationalitätsbereichen entsprechen, aber umfassender als diese sind. (So bildet beispielsweise die Gesamtheit der algebraischen Zahlen zwar einen orthoiden, aber keinen Rationalitätsbereich). Als Ausgangspunkt der Theorie wählt König den von *Kronecker* in seiner Arbeit "Zur Theorie der Formen höherer Stufe" (Berl. Monatsber. 1883) aufgestellten und dann später namentlich von Hurwitz ("Über die Theorie der Ideale" Gött. Nachr. 1894) in seiner Wichtigkeit erkannten Satz, der sich auf die Relationen zwischen den Koeffizienten mehrerer Formen und denen ihres Produktes bezieht, für welchen ein elementarer Beweis gegeben wird. Über den weiteren Inhalt des Buches sagt dann der Verf. selbst: "Dem *Kronecker*schen Satze reiht sich die Aufstellung der von mir sogenannten Resolventenform an, die als für ein beliebiges Formensystem geltende arithmetische Erweiterung des Resultantenbegriffs aufzufassen ist und insbesondere immer als homogene lineare Form der gegebenen Formen dargestellt werden kann. Dabei vird nach dem Beispiele *Kronecker*s bei Benutzung des Ausdrucks "Form" von der Forderung der Homogenität abgeschen. Die Einführung der Resolventenform einerseits, der *Kronecker*sche Grundgedanke der Assoziation neuer Unbestimmter andrerseits führen zu einer im vollen Sinne des Worts – allgemeinen Theorie der Elimination, in der die Multiplizität der durch irgend ein Gleichungssystem definierten Mannigfaltigkeiten nicht mehr, wie dies in der "Festschrift" der Fall ist, vernachlässigt wird. So entsteht ein mächtiges Werkzeug der Forschung, das uns zunächst eine rein algebraische Theorie der Funktionaldeterminanten liefert. In einem längeren Exkurse wird dann auch eine definitive Darstellung der sogenannten speziellen Eliminationstheorie, d. h. die allgemeine Theorie der Resultanten und Diskriminanten – letztere zum ersten Male – gegeben. – Die im engeren Sinne des Wortes arithmetischen Teile der Theorie erhalten durch die Behandlung der linearen diophantischen Probleme eine feste Grundlage. Als solches wird die allgemeine Lösung eines Gleichungssystems hingestellt, dessen einzelne Gleichungen die Gestalt $\Sigma_i X_i = F$ haben. Dabei sind die F als gegebene, die X als unbekannte Formen angesehen, die der weiteren Bedingung unterworfen sind, daß ihre Koeffizienten einem bestimmten, vorweg gegebenen holoiden Bereiche angehören. Dieses Problem wird in den für die Theorie der algebraischen Größen ausreichenden Fällen durch eine endliche, wohldefinierte Reihe elementarer Operationen vollständig gelöst. Es sind dies die Fälle, wo die Formenkoeffizienten entweder einem orthoiden Bereiche oder aber dem Bereiche der ganzen rationalen Zahlen angehören. Der erste Fall ergibt unter anderem eine allgemeine Behandlung des Noetherschen Satzes im Raume von n Dimensionen. Mit diesen Resultaten ist nicht nur die wichtige, bisher kaum gestreifte Frage nach der Äquivalenz zweier Divisorensysteme vollständig gelöst, sondern es ist auch die allgemeinere Frage des "Enthaltenseins" eines Divisorensystems in einem andern erledigt.

In der Theorie der ganzen algebraischen Größen werden die beiden Fälle der im strengen Sinne der allgemeinen Arithmetik ("absolut") ganzen Größen und der in bezug auf einen orthoiden Bereich ("relativ") ganzen Größen zugleich und nach denselben Methoden behandelt. Im zweiten Falle sind unter anderem die im Sinne der Funktionentheorie oder Geometrie ganzen Größen enthalten. Es ist ein Kardinalpunkt der Darstellung, daß die idealen Größen von Beginn ab als nicht nur der Multiplikation, sondern auch der Addition fähige Größen eingeführt werden. Auf dieser Grundlage baut sich eine wesentlich neue und einfache Methode zur wirklichen Bestimmung des Fundamentalsystems in allen Fällen auf, die in erster Reihe auf der Theorie des Äquivalenzmoduls" beruht Die Zerlegung einer ganzen Größe in Primideale wird endlich definitiv und ohne Ausnahmefall geleistet wobei die diesbezüglichen *Kronecker*schen Resultate in einem wesentlichen Punkte richtig zu stellen sind da diese infolge eines merkwürdigen allerdings tiefer liegenden Versehens nur in den einfachsten Fällen richtig sind." Zur weiteren Orientierung über den Inhalt seien noch die Uberschriften den einzelnen Kapitel mit geteilt: 1. Einleitende Grundbegriffe. Holoiden Bereichen entstammende Formen. 3. Die Teilbarkeit der Formen. 4. Die algebraischen Größen. 5. Allgemeine Theorie der Elimination. 6. Resultanten und Diskriminanten (Spezielle Eliminationstheorie). 7. Lineare diophantischen Probleme. 8. Arithmetische Theorie der linearen diophantischen Probleme. 9. Die ganzen algebraischen Größen. Eine angenehme Beigabe ist ein ausführliches Sachregister, das schnell gestattet, sich über die Bedeutung der Termini technici, insbesondere der neu eingeführten, zu unterrichten.

Reviewer: Faerber, Dr. (Berlin)

Full Text: Link