Landau, E.

Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes. (German) JFM 34.0228.03

Math. Ann. 56, 645-670 (1903).

Wenn $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leqq x$ bezeichnet und $Li(x)$ den Integrallogarithmus von x, so ist bekanntlich

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi(x)}{Li(x)} = 1.$$

Dieser wichtige, schon von *Gauß* vermutete Satz ist zuerst von *de la Vallée Poussin* im Jahre 1896 bewiesen worden, auf Grund der vorangegangenen *Hadamard*schen Untersuchungen über ganze transzendente Funktionen und die *Riemann*sche Zetafunktion. Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit gibt Verf. für den Satz einen Beweis an, welcher sich nur der klassischen funktionentheoretischen Mittel bedient. Der Kern des Beweises liegt darin, daß es möglich ist, die Behandlung eines gewissen komplexen Integrals mit dem Integranden $\frac{x^s}{s^2}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ selbst ohne Kenntnis vom Vorhandensein der komplexen Nullstellen der Zetafunktion durchzuführen. Die Partialbruchzerlegung von $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ kann dabei nicht angewendet werden; aber die Auffindung einer gewissen oberen Schranke für $\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|$ führt eben schon zum Ziel.

Zugleich mit dem obigen "Primzahlsatz" ergibt sich ein neuer und vereinfachter Beweis für den zuerst von *de la Vallée Poussin* (vergl. F. d. M. 30, 193-194, 1899, JFM 30.0193.01 u. JFM 30.0193.02) bewiesenen Satz: Der Integrallogarithmus stellt die Primzahlmenge genauer dar als alle seine Näherungswerte in endlicher Form.

Die neue Methode kürzt nicht nur den Weg zu dem "Primzahlsatz" wesentlich ab, sondern sie liefert für den analogen "Primidealsatz" in der Theorie der algebraischen Zahlkörper überhaupt zum ersten Male einen Beweis. Verf. führt dies im zweiten Teil der Arbeit aus und benutzt dabei einige früher (vergl. F. d. M. 33, 215-216, 1902, JFM 33.0215.01) von ihm bewiesenen Sätze über die verallgemeinerte Zetafunktion $\zeta_\kappa(s)$. Das Resultat lautet, wenn $\pi_\kappa(x)$ die Anzahl der Primideale eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers bezeichnet, deren Norm $\leqq x$ ist:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi_\kappa(x)}{Li(x)} = 1$$

und noch genauer

$$\pi_\kappa(x) = Li(x) + O\left(xe^{-1\sqrt[3]{\log x}}\right).$$

Daraus folgt insbesondere, daß für zwei algebraische Zahlkörper κ_1 und κ_2

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi_{\kappa_1}(x)}{\pi_{\kappa_2}(x)} = 1$$

ist.

Reviewer: Landau, Dr. (Berlin)

Full Text: DOI EuDML

References:

[1] Diese Benennung entnehme ich der Dissertation von Herrn von Schaper: ?Über die Theorie der Hadamardschen Funktionen und ihre Anwendung auf das Problem der Primzahlen?, Göttingen, 1898, S. 58.

[2] Vergl. die Anmerkung Herrn de la Vallée-Poussins am Schlusse der Arbeit Herrn von Mangoldts: ?Über eine Anwendung der Riemannschen Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze?, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 119, 1898, S. 70.

[3] ?Sur la distribution des zéros de la fonction ?(s) et ses conséquences arithmétiques?, Bulletin de la société mathématique de France, Bd. 24, 1896, S. 199-220.

[4] ?Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers?, Annales de la société scientifique de Bruxelles, Bd. 20, Teil 2, S. 183-256.

[5] ?Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann?, Journal de mathématiques pures et appliquées, Ser. 4, Bd. 9, 1893, S. 210-215.

[6] Vergl. Riemann, ?Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse?, Monatsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1859, S. 671-672; Werke, 2. Aufl., 1892, S. 145.

[7] Vergl. z. B. Jensen, ?Sur la fonction ?(d) de Riemann?, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences, Paris, Bd. 104, 1887, S. 1156.

[8] l. c.„ S. 220-242 und 395-397.

[9] ?Über eine Eigenschaft der Riemannschen ?-Funktion?, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. 107, Abth. 2a, 1898, S. 1431-1436.

[10] ?Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale?, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 125, 1902, S. 98.

[11] ?Sur la fonction ?(8) de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée?, Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'academie royale de Belgique, Bd. 59, 1899, S. 37.

[12] In dieser Form stellt Herr de la Vallée-Poussin in seiner Arbeit ?Démonstration simplifiée du théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique? (Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'académie royale de Belgique, Bd. 53, 1896, S. 7) die ?-Funktion für ?(s)>0 dar; vergl. auch seine ?Recherches etc.?, S. 185.

[13] Es hat für das Folgende kein Interesse, die in den Ungleichungen auftretenden Konstanten tunlichst klein bezw. groß zu wählen; wesentlich sind nur die Größenordnungen der auftretenden Vergleichsfunktionen. Daß für ?(8)=1 ?(s) nicht stärker als von der Größenordnung logt unendlich werden kann, ist übrigens schon durch Herrn Mellin bekannt (?Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Funktionen von endlichem Geschlecht?, Acta societatis scientiarum Fennicae, Bd. 29, No. 4, 1900, S. 48-49).

[14] Wie Herr Mertens (?Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie?, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 78, 1874. S. 48) einfach bewiesen hat, ist stets ?(v)<2v.

[15] ?Sur la distribution etc.? S. 217-218.

[16] l. c., ?Sur la distribution etc.? S. 213, 216-217.

[17] l. c., ?Sur la distribution etc.? S. 213-216.

[18] Vergl. v. Mangoldt, ?Zu Riemanns Abhandlung über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse?, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 114, 1895, S. 277-278.

[19] ?Sur la fonction etc.?, S. 63.

[20] l. c., ?Sur la fonction etc.? S. 5-6.

[21] Vergl. meine auf S. 647, Anm. 3 zitierte Arbeit, S. 142.

[22] Vergl. Hilbert, ?Mathematische, Probleme?, Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1900, S. 275-276 und Archiv der Mathematik und Physik, Ser. 3, Bd. 1, 1901 S. 215.

[23] Vergl. z. B. die von ihm herausgegebenen Vorlesungen Dirichlets über Zahlentheorie, 4. Aufl., 1894, S. 610-611.

[24] l. c., Vergl. z. B. die von ihm herausgegebenen Vorlesungen Dirichlets über Zahlentheorie, 4. Aufl., 1894, S. 81.

[25] l. c., Vergl. z. B. die von ihm herausgegeben Vorlesungen Dirichlets über Zahlentheorie, 4. Aufl., 1894, S. 82.

[26] l. c., Vergl. z. B. die von ihm herausgegeben Vorlesungen Dirichlets über Zahlentheorie, 4 Aufl., 1894, S. 96.

[27] l. c., Vergl. z. B. die von ihm herausgegebenen Vorlesungen Dirichlets über, Zahlentheorie, 4. Aufl, 1894, S. 94.

[28] l. c., Vergl. z. B. die von ihm herausgegebenen Vorlesungen Dirichlets über Zahlentheorie, 4. Aufl., 1894, S. 71 und 143.

[29] l. c., Vergl. z. B. die von ihm herausgegebenen Vorlesungen Dirichlets über Zahlentheorie, 4. Aufl., 1894. S. 122