Cahen, E.

On the exact integral solution of linear equations with arbitrary coefficients. (Sur la résolution exacte en nombres entiers des équations linéaires à coefficients quelconques.) (French)

JFM 33.0207.03
S. M. F. Bull. 30, 234-242 (1902).

Verf. versteht unter Normalreihe von Näherungswerten für die positive (rationale oder irrationale) Zahl a eine unendliche Folge von Brüchen $\frac{m^{(1)}}{n^{(1)}}, \frac{m^{(2)}}{n^{(2)}}, \ldots$ mit folgender Eigenschaft: Wird

$$a = \frac{m^{(\nu)}}{n^{(\nu)}} + \frac{\varepsilon^{(\nu)}}{n^{(\nu)}}$$

gesetzt, so ist $\lim_{\nu=\infty} \varepsilon^{(\nu)} = 0$. Daß eine solche Normalreihe stets vorhanden ist, folgt aus den einfachsten Eigenschaften der Kettenbrüche. Analog folgt aus einem bekannten *Hermite*schen Satze, daß für p positive Zahlen $a_1, \ldots, a_p$ eine Normalreihe von Näherungswerthen existiert, d. i. eine endliche Folge von Systemen von p Brüchen mit folgender Eigenschaft: Wenn dem Index ν die p Brüche $\frac{m_1^{(\nu)}}{n^{(\nu)}}, \ldots, \frac{m_p^{(\nu)}}{n^{(\nu)}}$ entsprechen und

$$a_1 = \frac{m_1^{(\nu)}}{n^{(\nu)}} + \frac{\varepsilon_1^{(\nu)}}{n^{(\nu)}}, \ldots, a_p = \frac{m_p^{(\nu)}}{n^{(\nu)}} + \frac{\varepsilon_p^{(\nu)}}{n^{(\nu)}}$$

gesetzt wird, so ist $\lim_{\nu=\infty} \varepsilon_1^{(\nu)} = 0, \ldots, \lim_{\nu=\infty} \varepsilon_p^{(\nu)} = 0$. Verf. beweist folgende Haupteigenschaft der Normalreihen: Wenn zwischen den p Zahlen $a_1, \ldots, a_p$ eine ganzzahlige lineare Relation besteht $A_1 a_1 + \cdots + A_p a_p + B = 0$, so gilt dieselbe Relation zwischen den Brüchen jeder Normalreihe von einem gewissen Index an:

$$A_1 \frac{m_1^{(\nu)}}{n^{(\nu)}} + \cdots + A_p \frac{m_p^{(\nu)}}{n^{(\nu)}} + B = 0.$$

Dann entwickelt er noch einen komplizierteren Satz ähnlicher Art, welcher in Zusammenhang mit dem Kroneckerschen (vergl. F. d. M. 16, 83-84, 1884, JFM 16.0083.02) Problem von der näherungsweisen Auflösung linearer Gleichungen steht; hierbei kommt es ja zuerst darauf an, die etwa vorhandenen genauen ganzzahligen linearen Gleichungen zwischen den Koeffizienten aufzufinden.

Reviewer: Landau, Dr. (Berlin)

MSC:

11D04 Linear Diophantine equations
11J13 Simultaneous homogeneous approximation, linear forms

Keywords:

linear relation; approximation; normal series; continued fraction; solution of a linear equation

Full Text: DOI Numdam EuDML