Engel, F.
Die höheren Differentialquotienten. (German) JFM 33.0299.05
Leipz. Ber. 54, 17-51 (1902).

Es handelt sich um das schwierige Problem, für die Elemente zweiter und höherer Ordnung eine ähnliche analytische Darstellung zu finden, wie sie für die Elemente erster Ordnung durch Clebschs Konnexkoordinaten geliefert wird. Theoretisch hatte der Verf. diese z. B. für die Theorie der algebraischen Differentialgleichungen so wichtige (von *F. Klein* gestellte) Aufgabe schon früher erledigt (Leipz. Ber. 45, 468 bis 476; F. d. M. 25, 645, 1893, JFM 25.0645.03). Hier gibt er eine auch für die Praxis brauchbare Lösung.

Eine allgemeine Definition für die Elemente beliebig höher Ordnung in der projektiven Ebene gewinnt der Verf. durch schrittweises Vorgehen, und zwar nach einem Prinzip, das er folgendermaßen ausspricht:

1. Wir nennen zwei unendlich benachbarte Elemente n-ter Ordnung vereinigt liegend, wenn die Elemente $(n-1)$-ter Ordnung, denen sie angehören, entweder identisch sind oder vereinigt liegen.

2. Hat man ein Element n-ter Ordnung und ein zweites, ihm unendlich benachbartes und mit ihm vereinigt liegendes, so ist dadurch stets ein Element $(n+1)$-ter Ordnung bestimmt, das jenem Elemente n-ter Ordnung angehört, und umgekehrt erhält man auf diese Weise alle einem Elemente n-ter Ordnung angehörigen Elemente $(n-1)$-ter Ordnung.

Da die Elemente erster Ordnung in befriedigender Weise definiert sind (Punkt und hindurchgehende Gerade) und auch der Begriff der vereinigten Lage für sie feststeht, so kann man sukzessiv zur Definition der Elemente beliebig hoher Ordnung aufsteigen. Man erkennt leicht, daß die so definierten Elemente n-ter Ordnung die gewöhnlichen Elemente $(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ umfassen und eine im Cantorschen Sinne abgeschlossene Mannigfaltigkeit bilden, welche bei allen projektiven Transformationen invariant bleibt. Um die zu Anfang bezeichnete Aufgabe zu lösen, muß man solche Koordinaten für ein Element n-ter Ordnung finden, die eine eindeutige und ausnahmlose Darstellung aller Mitglieder jener abgeschlossenen Mannigfaltigkeit erlauben.

Sind x, y rechtwinklige Koordinaten, so wird jedes Element erster Ordnung, dessen Punkt im Endlichen liegt (was sich durch proj. Transf. bewirken läßt), dargestellt durch x, y und zwei Verhältnisgrößen p und q, welche die Gerade des Elements $p(X-x)+q(Y-y)=0$ festlegen. Die Bedingung für die vereinigte Lage zweier unendlich benachbarten Elemente ist $pdx+qdy=0$. Unter den ∞^1 Elementen $(x+dx, y+dy, p+dp, q+dq)$, die diese Bedingung erfüllen, gibt es eins, welches mit (x,y,p,q) den Punkt, ein anderes welches mit ihm die Gerade gemein hat. Versucht man jene ∞^1 Elemente durch zwei Verhältnisgrößen σ und τ darzustellen, derart, daß das erstgenannte Element durch $\tau=0$, das letztgenannte durch $\sigma=0$ charakterisiert ist, so wird man auf folgende Proportion geführt:

$$\tau q : \tau p : \sigma = dx : -dy : (pdq - qdp).$$

Da $dx, dy, pdq-qdp$ nicht gleichzeitig verschwinden können, so lange die Elemente $(x,y,p,q), (x+dx, y+dy, p+dp, q+dq)$ verschieden sind, so ist $\sigma:\tau$ bestimmt. Umgekehrt bestimmt jedes Wertsystem $\sigma, \tau (\neq 0,0)$ ein einziges zu (x,y,x,q) gehöriges Element zweiter Ordnung. Stellt man nun noch den Punkt und die Gerade von (x,y,p,q) durch homogene Koordinaten dar, so ergeben sich als Koordinaten eines Elements zweiter Ordnung die acht Größen

$$x_1,, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3, \sigma, \tau,$$

$$\begin{aligned}(u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3 =&0; \quad x_1,x_2,x_3\neq 0,0,0;\\ &u_1,u_2,u_3\neq 0,0,0; \quad \sigma,\tau 0,0)\end{aligned}$$

die man, unter λ, μ, nu beliebige nicht verschwindende Zahlen verstanden, bezüglich mit $\lambda, \lambda, \lambda, \mu, \mu, \mu, \mu^3\nu, \lambda^3\nu$ multiplizieren darf. Dieselben Koordinaten hat auch *Study* (allerdings auf anderem Wege) gefunden (Die Elemente zweiter Ordnung in der ebenen projektiven Geometrie Leipz. Ber. 53, 338-403; F. d. M. 32, 533, 1901, JFM 32.0533.01). y' und y'' drücken sich folgendermaßen durch die neuen Elementkoordinaten aus

:

$$y' = -\frac{u_1}{u_2}, \quad y'' = \frac{\sigma x_3^3}{\tau u_3^3}.$$

Ein Element dritter Ordnung in der Ebene wird in befriedigender Weise charakterisiert durch die acht Koordinaten seines Elements zweiter Ordnung und zehn Größen ϱ und ϱ_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$, zwischen denen die Relation $\varrho_{11} + \varrho_{22} + \varrho_{33} = 0$ besteht.

Auch für die Elemente zweiter Ordnung des *Raumes* erledigt der Verf. seine Aufgabe vollständig, und zwar geht er wieder von einer geometrischen Definition des Elements zweiter Ordnung aus, die die gewöhnlichen Elemente (x, y, z, p, q, r, s, t) umfaßt, sie aber zu einer abgeschlossenen Mannigfaltigkeit ergänzt. Die Schwierigkeiten der analytischen Durchführung werden durch Anwendung der symbolischen Rechnung überwunden.

Reviewer: G. K.