Lebesgue, H.

Intégrale, longueur, aire. (French) JFM 33.0307.02

Annali di Mat. (3) 7, 231-359 (1902); auch sep. Thèse. Milan: Rebeschini. 129 S. 4°. (1902).

Legt man die *Riemann*sche Definition des bestimmten Integrals zugrunde, so gibt es, wie *Volterra* gezeigt hat, nicht-integrable Derivierte. Das Fundamentalproblem der Integralrechnung, eine Funktion zu finden, deren Derivierte man kennt, läßt sich also durch Integration im *Riemann*schen Sinne nicht immer lösen. Durch eine Verfeinerung der alten Erklärung des Integrals als eines Flächeninhalts ist es dem Verf. gelungen, einen Integralbegriff zu bilden, der diesen Übelstand beseitigt (wenigstens für den Fall, daß die Derivierte zwischen endlichen Grenzen liegt). Existiert das *Riemann*sche Integral, so fällt das Lebesguesche mit ihm zusammen.

Die Grundlage der ganzen Arbeit ist mengentheoretisch. Es wird ein neuer Maßbegriff für Punktmengen eingeführt.

Hat man auf einer Geraden eine ganz im Endlichen gelegene Punktmenge E, so ist es auf unendlich viele Weisen möglich, ihre Punkte in eine endliche oder abzählbar unendliche Menge von Intervallen einzuschließen, die nicht übereinander greifen. Man bilde die Summen der Längen dieser Intervalle. Die untere Grenze aller derartigen Summen nennt *Lebesgue* das äußere Maß (mesure extérieure) von E und bezeichnet es mit $m_e(E)$. Betrachtet man auf einer Strecke von der Länge l, die alle Punkte von E enthält, die nicht zu E gehörigen Punkte, so hat man eine Menge E_1. Die von der Wahl der Strecke unabhängige Zahl $l - m_e(E_1)$ heißt das innere Maß (mesure intérieure) von E und wird mit $m_i(E)$ bezeichnet. Es ist offenbar immer $m_e \geqq m_i$. Im Falle der Gleichheit heißt die Punktmenge E meßbar und

$$m(E) = m_e(E) = m_i(E)$$

ihr Maß.

Hat man in der Ebene eine ganz im Endlichen gelegene Punktmenge, so lassen sich ihre Punkte auf unendlich viele Arten in eine (endliche oder abzählbare unendliche) Menge von Dreiecken einschließen, und es ergibt sich alsdann, ganz ähnlich wie oben, ein äußeres und ein inneres Maß für die Punktmenge. Im Falle der Gleichheit beider heißt die Menge meßbar und der gemeinsame Wert ihr Maß. Diese Definition der meßbaren Mengen läßt sich leicht auf einen Raum von beliebig vielen Dimensionen ausdehnen.

Das Integral $\int_a^b f(x)dx$ wird nun in folgender Weise erklärt: Man denke sich in jedem Punkt des Kurvenbogens $y = f(x)$, $a \leqq x \leqq b$, die Ordinate gezeichnet und betrachte den Inbegriff E aller Punkte; die auf diesen Ordinaten liegen, d. h. die Punkte

$$x = a + \vartheta(b - a), \quad y = \vartheta_1 f(x) \quad (0 \leqq \vartheta,\ \vartheta \leqq 1).$$

Ist E eine meßbare Menge, so gilt dasselbe von der Menge E_1, aller Punkte von E mit positiver Ordinate, sowie von der Menge E_2 aller Punkte von E mit negativer Ordinate; es existieren also die Zahlen $m(E_1), m(E_2)$, und *Lebesgue* setzt nun

$$\int_a^b f(x)dx = m(E_1) - m(E_2).$$

$f(x)$ nennt er eine summierbare Funktion (fonction sommable). Er entwickelt eine Reihe von Eigenschaften dieser Integrale. Der neue Integralbegriff läßt sich leicht auf Funktionen von mehreren Veränderlichen ausdehnen.

Bei der Definition der Begriffe "Bogenlänge" und "Inhalt einer krummen Fläche" wird eine möglichst vollkommene Analogie angestrebt. Die Länge einer Kurve C ist der unterste Häufungswert der Längen gleichmäßig nach C konvergierender polygonaler Linien, der Inhalt einer Fläche F der unterste Häufungswert der Inhalte gleichmäßig nach F konvergierender polyedraler Flächen. Es wird untersucht, wie weit der neue Integralbegriff die Darstellung dieser Größen ermöglicht.

In den letzten Kapiteln werden gewisse Modifikationen erörtert, welche infolge der neuen Definitionen in

Sätzen der Flächentheorie eintreten. Nennt man z. B. eine Fläche abwickelbar, wenn sie sich derart auf die Ebene abbilden läßt, daß die Längen erhalten bleiben, so existieren, wie gezeigt wird, *abwickelbare Flächen, die kein Geradenstück enthalten.* Andererseits gibt es *gewundene Kurven, die in jedem Punkt eine Schmiegungsebene haben, und deren Tangenten trotzdem eine nicht abwickelbare Fläche bilden.* Flächen und Kurven sind dabei immer durch Funktionen dargestellt, die eine gewisse Zahl von Ableitungen besitzen.

Reviewer: G. K.

Full Text: DOI

References:

[1] VoirSchwarz, lettre àGenocchi. Cette lettre est reproduîte dans l'édition lithographiée duCours professé à la Facullè des sciences par Ch. Hermite, pendant le second semestre de 1882. (Second tirage, page 25.) – Voir aussiPeano,Atti della Accademia dei Lincei, 1890.

[2] Voir au sujet de ces définitionsSchoenflies,Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1900.

[3] American Journal, 1897.

[4] Scheeffer,Acta Mathematica, 5;Jordan,Cours d'Analyse.

[5] Mathematische Annalen, Bd. 15, pag. 287 etActa Mathematica, 6.

[6] Nouvelles Annales de Mathématiques. Août 1900.

[7] Leçons sur la théorie des fonctions, pages 46 à 50.

[8] Jordan, Tome I. –J. Hadamard,Géométrie Elémentaire.

[9] Jordan,Cours d'Analyse, 2ème Edition, Tome I, pages 90 à 100.

[10] C'est ainsi que M.r Hadamard pose le problème des aires pour les polygones. (Géométrie Elémentaire, NoteD.)

[11] Il existe des courbes non quarrables puisqu'il existe des courbes passant par tous les points d'un carré. Pour former une courbe non quarrable, sans point multiple il suffit de modifier légèrement la méthode qu'emploie M.r Hilbert pour définir une courbe passant par tous les poínts d'un carré (Mathematische Annalen, Bd. 38 ouPicard,Traité d'Analyse, 2.e Edition, Tome I). On remplacera chacun des carrés qui figure dans la définition de M.r Hilbert par un polygone intérieur à ce carré, d'aire assez grande, choisi de façon que les frontières de deux de ces polygones n'aient en commun que le sommet, s'il existe, par lequel la courbe passe de l'un dans l'autre.

[12] Darboux,Mèmoire sur les fonctions discontinues. Annales de l'Ecole Normale, 1875. · Zbl 07.0243.02

[13] Riemann,Sur la possibilité de reprèsenter une fonction par une série trigonométrique.

[14] Le cas particulier le plus intéressant de ce théorème, celui oùf et lesf i sont des fonctions continues, a déjà été obtenu, à l'aide de considérations toutes différentes par M.r Osgood dans son Mémoire sur la convergence non uniforme (American Journal, 1894).

[15] VoirDarboux,Mémoire sur les fonctions discontinues.

[16] M.r Volterra a le premier donné effectivement un exemple de ces fonctions (Giornale de Battaglini, t. XIX, 1881). Cet exemple est reproduit plus loin.

[17] Nous nous servirons ici de quelques unes des propriétés de ces fonctions (VoirJordan,Comptes Rendus de l'Académie des Sciences 1881 etCours d'Analyse 2 ème Edition, tome I). La plupart de ces propriétés sont reprises dans le chapitre suivant, de sorte que les paragraphes 30 à 35 pourraient être mis dans ce chapitre. L'ordre adopte dans le texte permet de réunir tout ce qui a trait à la recherche des fonctions primitives,

[18] Comparer cette définition avec celle que donne M.r Jordan de l'intégrale définie d'une fonction non bornée.Cours d'Analyse, 2.e Edition, Tome II, p. 46 à 94.

[19] VoirDini:Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.

[20] Ce problème a un sens; c'est-à-dire que toutes les fonctions qui ont un même nombre dérivé donné ne diffèrent que par une constante (Volterra.Sui principii del Calcolo Integrale. Giornale de Battaglini, XIX).

[21] VoirLebesgue.Sur l'approximation des fonctions. (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1898.)

[22] VoirJordan (loc. cit.) {\S}{\S} 56, 57, 58.

[23] Ces mèthodes sont analogues à celles de M.r Drach. (Essai sur une théorie générale de l'Intégration – Introduction à l'Etude de la Théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure.) Voir à ce sujet la note 1, page 48 de l'ouvrage de M.r Borel. Voir aussiHadamard,Géométrie Elémentaire, lère Partie, NoteD.

[24] Atti della Reale Accademia dei Lincei. Rendiconti 1900, 1.o Semestre.

[25] Les conséquences de cette définition ont été particulièrement étudiées parLudwig Scheeffer (Acta Mathematica, tome V) et par M.r Jordan dans la seconde édition de son cours d'Analyse. Voir aussiStudy.Mathematische Annalen, XLV.

[26] Si l'on considère la longueur comme fonction de la courbe, on peut dire que la fonction est partout égale à son minimum ou encore semi-continue inférieurement (Baire, loc. cit.).

[27] VoirJordan, (loc. cit.), page 318.

[28] On peut dans cet énoncé supprimer le motcontínues, (voir à ce sujetJordan, loc. cit.).

[29] Atti della Reale Accademia dei Lincei, Rendiconti 1890.

[30] Voir au sujet de ces essais de définition la note déjà citée de M.r Peano.

[31] Dans un article récent (Ueber die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen – Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1901) M.r Minkowski adopte pour la longueur et l'aire les définitions suivantes. De chaque point d'une courbeC comme centre traçons une sphère de rayonr l'ensemble des points intérieurs à l'une au moins de ces sphères est mesurable, soitV(r) sa mesure; la limite, si elle existe, du rapportV(r)/{\(\pi\)}r 2 quandr tend vers zéro est dite la longueur deC. De même siV(r) est la mesure de l'ensemble des points dont la distance à l'un des points d'une surfaceS est inférieure àr, la limite deV(r)/2r définit l'aire deS.

[32] Loc. cit.

[33] Voir chapitre VI.

[34] Chapitre V.

[35] On le verrait en reprenant les raisonnements du paragraphe 48.

[36] Annali di Matematica, 2.c Série, Tome VII. Cette démonstration est reproduite avec les mêmes notations dans le Tome I desLeçons sur la théorie des Surfaces de M.r Darboux et dans lesTraités d'Analyse de MM.rs Jordan etPicard.

[37] Dans sa note desNouvelles Annales, M.r Hilbert n'a exposé sa méthode pour établir l'existence de l'élément limite que sur deux exemples particuliers. Il me semble bien que la méthode qui ressort de ces deux exemples est celle du {\S} 95. En tous cas les résultats de ce paragraphe suffisent à démontrer l'existence des éléments limites dans les deux exemples de M.r Hilbert.

[38] Pourf=1 on retrouve l'un des exemples que traite M.r Hilbert.

[39] V, 4.me Cahier du tome VII.