Enriques, F.
Intorno ai fondamenti della geometria sopra le superficie algebriche. (Italian) JFM 33.0654.01
Torino Atti 37, 19-40 (1902).

Enriques und *Castelnuovo* haben (cf. F. d. M. 32, 622, 1901, JFM 32.0622.01) eine systematische Theorie der Geometrie auf den algebraischen Flächen entwickelt. Da die dort in § 1 und § 2 gegebenen Grundlagen nur sehr knapp gefaßt sind, hat *Enriques* nunmehr eine ausführliche Einleitung in jene große Arbeit verfaßt.

Sei F eine singularitätenfreie algebraische "Fläche" im Raume S_k von k Dimensionen. Durch eine lineare ∞^r Schar

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_{r+1} f_{r+1} = 0$$

von Flächen wird auf F ein lineares System $|C|$ von ∞^r Kurven C ausgeschnitten. Irgend ein fester gemeinsamer Punkt der Kurven C, von der Multiplizität i, heißt ein i-facher Basispunkt des Systems $|C|$.

Geht F durch eine birationale Transformation über in F_1, so geht auch das System $|C|$ auf F in ein System $|C_1|$ auf F_1 über. Ein i-facher Basispunkt von $|C|$ geht dabei im allgemeinen über in einen eben solchen für $|C_1|$. Dagegen verwandelt sich ein für die Transformation "fundamentaler" Basispunkt A von $|C|$ in eine Kurve a auf F_1, die dann eine "Ausnahmekurve" heißt. Diese Fundamentalpunkte A zerfallen in drei Klassen. Ist die Kurve a kein fester Bestandteil der Kurven C_1, so wird A "virtualmente non esistente" genannt (erste Klasse). Ist dagegen a, i-mal gerechnet, ein fester Bestandteil der C_1, so ist der i-fache Basispunkt A "assegnato di molteplicità virtuale i" (zweite Klasse).

Ist endlich a, schon j-mal ($j < i$) gerechnet, ein fester Bestandteil der C_1, so heißt A "assegnato di molteplicità virtuale j e di molteplicità accidentale i" (dritte Klasse). Ein System $|C|$, virtual frei von Basispunkten auf F, ist ein "vollständiges", wenn es nicht in einem umfassenderen System derselben Ordnung enthalten ist. Dann gilt der grundlegende Satz, daß irgend eine Kurve C auf F einem bestimmten vollständigen System $|C|$ derselben Ordnung angehört.

Der Begriff eines vollständigen Systems $|C|$ nebst dem soeben erwähnten Satze läßt sich auf den Fall ausdehnen, daß $|C|$ Basispunkte der zweiten Klasse enthält. Die Eigenschaft der Vollständigkeit eines Systems $|C|$ ist dann gegenüber jeder birationalen Transformation von F eine invariante.

Liegen zwei vollständige Systeme $|C|$ und $|K|$ auf F vor, so existiert ein bestimmtes vollständiges Summensystem $|C+K|$, das alle aus Kurven C und K zusammengesetzten Kurven enthält. Umgekehrt gibt es dann auch, unter gewissen Voraussetzungen über $|C|$ und $|K|$, ein bestimmtes Differenzsystem $|C-K|$. Sind die Kurven C eines Systems reduzibel, so zerfallen sie in einen festen (allen gemeinsamen) Bestandteil und in einen variabeln irreduzibeln Teil.

Nunmehr werden die gegenüber einer birationalen Transformation invarianten "Charaktere" eines ∞^r-Systems $|C|$ eingeführt. Das ist einmal die "Dimension" r selbst, sodann das "Geschlecht" π und der "Grad" n. Im Falle, wo $|C|$ ein irreduzibles System ohne Basispunkte der dritten Klasse ist, ist π das Geschlecht der erzeugenden Kurve C und n die Anzahl der variabeln Schnittpunkte zweier erzeugenden C. Sind dagegen i-fache akzidentale Basispunkte vorhanden, so ist π noch um $\sum \frac{i(i-1)}{2}$ zu vermehren, n um $\sum i^2$, und eine entsprechende Vermehrung tritt bei assignierten Basispunkten ein.

Für die Geschlechter π_1, π_2, π und die Grade n_1, n_2, n der Systeme $|C_1|, |C_2|, |C_1+C_2|$ gelten die Beziehungen:

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1, \quad n = n_1 + n_2 + 2i,$$

wenn i die Zahl der virtualen Schnittpunkte von C_1 und C_2 bedeutet. Diese Beziehungen gestatten, die Begriffe Geschlecht und Ordnung auch auf reduzible Systeme $|C|$ auszudehnen, und gelten dann wiederum für solche.

Nunmehr wird der wichtige Begriff der *Jacobi*schen Kurve eingeführt. Es liege ein Netz (eine ∞^2 Schar) von Kurven auf F vor. der Ort der Doppelpunkte von Kurven des Netzes heißt die *Jacobi*sche Kurve des Netzes.

Zerlegt man ein beliebiges, aber mindestens zweifach unendliches Kurvensystem $|C|$ auf F auf alle möglichen Weisen in Netze, so bilden sämtliche *Jacobi*schen Kurven dieser Netze ein bestimmtes lineares

System.

Auf dem Begriff der *Jacobi*schen Kurve beruht weiterhin der der adjungierten Kurven C' eines Systems $|C|$ mit der fundamentalen Eigenschaft $|C' + K| = |(C + K)'|$.

Reviewer: Meyer, F., Prof. (Königsberg i. Pr.)