Dehn, M.

Über den Rauminhalt. (German) JFM 32.0486.01

Math. Ann. 55, 465-478 (1902).

Zwei Polyeder Π' und Π'' heißen "endlichgleich", wenn aus ihnen durch geeignetes Hinzufügen resp. kongruenter Polyeder zwei Polyeder $\overline{\Pi}'$ und $\overline{\Pi}''$ hervorgehen, die ihrerseits in resp. kongruente Polyeder zerlegbar sind. Sind Π' und Π'' selbst schon in resp. kongruente Polyeder zerlegbar, so heißen sie "zerlegungsgleich", anderenfalls "ergänznngsgleich". – Daß die Gleichheit des Inhaltes zweier Polyeder für die Zerlegungsgleichheit nicht ausreicht, hat der Verf. bereits in einer früheren Arbeit (Gött. Nach. 1900; vergl. F. d. M. 31, 505, JFM 31.0505.02) nachgewiesen; hier wird gezeigt, daß aus der Inhaltsgleichheit auch die Endlichgleichheit nicht gefolgert werden könne. Es seien $p'_1, p'_2, \dots;\ p''_1, p''_2, \dots$ die Kanten zweier endlichgleichen Polyeder, $\pi'_1, \pi'_2, \dots;\ \pi''_1, \pi''_2, \dots$ die an ihnen liegenden Flächenwinkel, ferner $L_i(p'_1, p'_2, \dots;\ p''_1, p''_2, \dots)$ $(i = 1, 2, \dots)$ das System von einander unabhängiger linearer, homogener Relationen mit rationalen Koeffizienten, welches zwischen $p'_1, p'_2, \dots, p''_1, p''_2, \dots$ besteht. Man ersetze jetzt in diesen Relationen die p', p'' durch Unbekannten auf. Da diese Gleichungen Lösungen besitzen (nämlich wenigstens die eine $p'_1, \dots, p''_1, \dots$), und ihre Koeffizienten rational sind, so besitzen sie auch rationale Lösungen. Es gilt nun der Satz: Ist $r'_1, r'_2, \dots;\ r''_1, r''_2, \dots$ irgend ein rationales Lösungssystem jener Gleichungen, so ist stets

$$r'_1\pi'_1 + r'_2\pi'_2 + \cdots - (r''_1\pi''_1 + r''_2\pi''_2 + \cdots) = r \cdot R,$$

wo r eine rationale Zahl und R einen rechten Winkel bezeichnet. Als Beispiel wird gezeigt, daß zwei reguläre Tetraeder niemals einem regulären Tetraeder endlichgleich sein können.

Reviewer: Steinitz, Dr. (Charlottenburg)

Full Text: DOI EuDML

References:

[1] Siehe vor Allem, D. Hilbert, Grundlagen d. Geom. 1899.

[2] Das Problem, das durch die vorliegende Arbeit erledigt wird, gehört zu den 23 Problemen, die von D. Hilbert in seinem Pariser Vortrag (Gött. Nachr. 1900, Heft 8) aufgestellt sind.

[3] Göttinger Nachrichten 1900.