Castelnuovo, G.; **Enriques, F.**
Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche. (Italian)
JFM 32.0622.01
Annali di Mat. (3) 6, 165-225 (1901).

Die Verf. fassen in dieser bemerkenswerten Abhandlung die Untersuchungen zusammen, die sie seit längerer Zeit über die Theorie der algebraischen Flächen F angestellt haben. Der Stoff wird auf sechs Kapitel verteilt, deren Überschriften lauten: I. Einfachste Eigenschaften linearer Kurvensysteme auf einer F. II. Invariante Charaktere der F. III. Ausnahmekurven. IV. F, auf denen der Prozeß der Adjunktion versagt, und deren Beziehung zu Regelflächen. V. Transformierbarkeit einer F in eine Regelfläche ohne gewisse Kurvensysteme. VI. Das Lineargeschlecht $p^{(1)}$ einer F und seine Bedeutung für die Transformierbarkeit der F in eine Regelfläche.

Zugrunde wird gelegt eine F in einem Raume S_r von $r \geqq 3$ Ausdehnungen. Da jede F birational in eine andere transformiert werden kann, für die $r \geqq 5$, und die keine Punktsingularitäten enthält, so ist es gestattet, die F *ohne vielfache Punkte* anzunehmen. Auf F werden *lineare Systeme* $|C|$ (algebraischer) Kurven C betrachtet; ein solches System heißt ein *vollständiges* oder *normales*, wenn kein es enthaltendes System derselben Ordnung existiert. Jede Kurve C bestimmt das zugehörige vollständige System $|C|$. Man darf daher annehmen, daß wenigstens ∞^1 Kurven C des Systems irreduzibel sind und keinen Basispunkt gemein haben. Es werden gewisse Operationen angegeben, die aus linearen Systemen neue herleiten. Die "*Summe*" $|C+K|$ zweier Systeme $|C|, |K|$ ist das System, das alle aus einer Kurve C und einer Kurve K zusammengesetzten Kurven enthält; sind $|C|$ und $|K|$ irreduzibel, so auch deren Summe.

Damit ist auch der Begriff der "*Differenz*" zweier Systeme bestimmt, von denen das eine das andere enthält; man hat die symbolische Gleichung $|K+X| = |C|$. Jedes System $|C|$ besitzt drei fundamentale *Charaktere*, die "*Dimension*", das "*Geschlecht*" und den "*Grad*", die gegenüber einer birationalen Transformation der Fläche invariant sind. Das Geschlecht eines (irreduzibeln und von Basispunkten freien) Systems $|C|$ ist das Geschlecht π einer erzeugenden Kurve C. Sind dagegen Basispunkte von den Vielfachheiten $j_1, j_2, \dots$ vorhanden, so tritt neben das "effektive" Geschlecht π von C noch das "virtuelle" Geschlecht

$$\pi + \sum \frac{j(j-1)}{2}\,.$$

Ist überdies $|C|$ reduzibel, etwa so, daß C in zwei Kurven mit den Geschlechtern π_1, π_2 und i gemeinsamen Punkten zerfällt, so ist π zu ersetzen durch $\pi_1 + \pi_2 + i - 1$, eine Fornel, die zugleich dazu dient, das Geschlecht einer Summe von zwei Systemen zu berechnen.

Der "Grad" eines (irreduzibeln, von Basispunkten freien) Systems $|C|$ ist die Zahl n der Schnittpunkte zweier erzeugenden Kurven C. Im Falle von Basispunkten ist der "effektive" Grad die Zahl n der variabeln Schnittpunkte der beiden C, während der "virtuelle" Grad $n + \sum j^2$ wird. Für reduzible Systeme ist zu beachten, daß der Grad N von $|C_1 + C_2|$ sich durch $N = n_1 + n_2 + 2i$ bestimmt, wo n_1, n_2 die Grade von $|C_1|, |C_2|$ und i die Zahl der Schnittpunkte einer C_1 mit einer C_2 ist.

Eine "Fundamentalkurve" bezüglich eines Systems $|C|$ schneidet keine Kurve C des Systems. Eine "Ausnahmekurve" γ läßt sich durch birationale Transformation der Fläche F in einen einfachen Punkt verwandeln.

Der wichtigste Begriff des Folgenden ist der der "Adjunktion", die zu einem System $|C|$ das "adjungierte" $|C'|$ liefert. Die Kurven C', die aus den C "Punktgruppen" $g_{2\pi-2}^{\pi-1}$ ausschneiden, bilden ein vollständiges lineares System, eben das zu $|C|$ adjungierte. Sind $|C|$ und $|K|$ zwei Systeme, so besteht die fundamentale Relation:

$$|(C+K)'| = |C+K'| = |C'+K|,$$

wo $|(C+K)'|$ das zu $|C+K|$ adjungierte System bezeichnet. Ist ein System $|C|$ virtuell frei von Basispunkten, so ist es auch das adjungierte.

Im zweiten Kapitel werden die gegenüber birationaler Transformation invarianten Charaktere einer Fläche F aufgestellt. Man hat "geometrische" und "arithmetische" Charaktere zu unterscheiden. Zu den geometrischen Charakteren gehört das Geschlecht p_g, sowie die "mehrfachen Geschlechter" P_i (wo $P_1 = p_g$). Führt man nämlich zu zwei Systemen $|C|$, $|K|$ ihre sukzessiven adjungierten ein, so folgt aus der obigen Fundamentalrelation, daß $|C^i - C| = |K^i - K|$. Ist also ein System $|C|$ in seinem i-fach adjungierten enthalten, so kommt diese Eigenschaft auch jedem andern System $|K|$ zu. Ein solches System $|C^i - C|$ (nachdem man es von etwaigen Ausnahmekurven befreit hat) heißt ein "i-fach kanonisches"; die Zahl der i-fach kanonischen linear unabhängigen Kurven ist also ein invarianter Charakter von F, das "i-Geschlecht" von F. Man kann jene Kurven übrigens auch erzeugen als Schnitt der in einer S_3 projizierten Fläche mit "i-fach adjungierten".

Unter den arithmetischen Charakteren von F ist vor allem das "arithmetische" oder "numerische" Geschlecht p_a (oder p_μ) zu erwähnen. Betrachtet man auf F ein irreduzibles System $|C|$, und bedeuten $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ die "deficienze" der linearen Punktgruppen, die auf einer Erzeugenden C durch die Systeme $|C'|, |C+C'|, |C+C'|, \dots$ ausgeschnitten werden, so besteht die das invariante arithmetische Geschlecht p_a definierende fundamentale Relation: $p_g - p_a = \sum \delta_i$. Die Eigenschaften dieser p_a führen zur Ausdehnung des *Riemann-Roch*schen Satzes auf Flächen F: "Ist $|C|$ ein (nicht spezielles) lineares irreduzibles System von dem Geschlechte π, dem Grade n, der Dimension r, das zu einer F vom numerischen Geschlecht p_a gehört, so gilt die Beziehung:

$$r \geqq n - \pi + 1 + p_a.\text{"}$$

Im Falle des Gleichheitszeichens heißen die fraglichen Systeme "regulär". Die Eigenschaften solcher regulären Systeme gestatten die Aufstellung des *Riemann-Roch*schen Satzes auch für reduzible Systeme.

Zu den arithmetischen Charakteren von F gehören auch relativ invariante, die sich nicht ändern gegenüber solchen besonderen birationalen Transformationen, bei denen keine Ausnahmekurven auftreten; die allgemeinere Invarianz heißt dann "absolute". Eine erste solche relative Invariante ω ist gegeben durch $\omega = \pi' + 3(\pi - 1) + n$, wo π, n Geschlecht und Grad eines Systems $|C|$ und π' das Geschlecht des adjungierten Systems $|C'|$ ist; ω ist unabhängig von der Auswahl des Systems $|C|$. Besitzt F keine Ausnahmekurven, so fällt ω zusammen mit dem *Noether*schen "Lineargeschlecht" $p^{(1)}$. Kennt man diese Invariante ω, so kann man für den Wert des i-Geschlechts P_i von F eine untere Grenze angeben (für jeden Wert von i). Eine zweite wichtige relative Invariante J erhält man, wenn man von einem linearen Büschel irreduzibler Kurven auf F ausgeht, vom Geschlecht $\pi > 0$, mit n Basispunktem und δ als der Anzahl der mit einem Doppelpunkte behafteten des Büschels, nämlich:

$$J = \delta - n - 4\pi.$$

J hängt wiederum von der Auswahl des Büschels nicht ab. Über diese Invariante J haben *Segre* und *Zeuthen* bemerkenswerte Theoreme aufgestellt. Mit ihrer Hülfe zeigt man auch, daß ein vielfacher Bestandteil einer Kurve des Büschels gleichwertig ist mit einer gewissen Anzahl von Doppelpunktskurven.

Die beiden relativen Invarianten ω und J stehen in merkwürdigen Beziehungen zu einander. So ist ihre Summe eine absolute Invariante; mit dem arithmetischen Geschlecht p_a ist dieselbe durch die wichtige Relation verknüpft: $\omega + J = 12p_a + 9$, die im wesentlichen von *Noether* herrührt.

In der obigen Definition von J war von einem *linearen* Kurvenbüschel auf F ausgegangen; es ist aber für manche Erweiterungen zulässig, auch *irrationale* Kurvenbüschel zu Grunde zu legen, wenn sie nur die Haupteigenschaft bewahren, daß durch jeden Punkt von F eine einzige Kurve des Systems hindurchgeht.

Zwischen den Invarianten π, p_a, r und ω besteht die Ungleichung:

$$5\pi + r \geqq 11p_a + \omega - 8.$$

Das dritte Kapitel ist dem Auftreten von Ausnahmekurven gewidmet, also solcher Kurven γ, die bei birationaler Transformation von F in eine Fläche F' der Umgebung eines einfachen Punktes G' auf F' zugeordnet sind, wobei sowohl F wie F' ohne singuläre Punkte vorausgesetzt werden dürfen. Den "ebenen" Schnitten von F' entsprechen auf F Kurven C eines linearen Systems $|C|$. Es sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden, je nachdem das System $|C|$ auf γ Basispunkte besitzt oder ncht. Im zweiten Falle schneidet γ keine Kurve C und heißt dann selbst "fundamental" für das System $|C|$; jedem ihrer Punkte entspricht ein Punkt der Umgebung von G'. Im ersten Falle dagegen sind die auf γ befindlichen Basispunkte von $|C|$ "Fundamentalpunkte" der Transformation, insofern ihnen auf F' (Ausnahme-)Kurven entsprechen, die durch G' hindurchlaufen. Die ersteren Kurven γ werden von der "ersten Art" genannt, die letzteren von der "zweiten Art". Für eine Kurve erster Art ist der "Grad" ν gleich -1, das Geschlecht ϱ gleich Null, und umgekehrt ist sie hierdurch charakterisiert. Beliebig viele Kurven γ der ersten Art (die sich nicht schneiden) lassen sich durch geeignete Transformation von F zerstören, d. h. in gewöhnliche Punkte verwandeln. Haben dagegen zwei Kurven γ der ersten Art γ, γ_1 einen gemeinsamen Punkt, so läßt sich wohl die eine derselben, etwa γ, in einen gewöhnlichen Punkt transformieren; dann geht aber die andere, γ_1, in eine Kurve γ_1' der zweiten Art über. Somit lassen sich Ausnahmekurven der zweiten Art nicht zerstören, ohne neue Ausnahmekurven hervorzubringen. Ein Beispiel hierfür bilden die Erzeugenden einer Regelfläche.

Die wichtige Frage nach einem Merkmale dafür, ob die Anzahl der Ausnahmekurven auf F eine endliche ist oder nicht, erfährt eine einfache Beantwortung durch Untersuchung der ebenen Schnitte von F. Ist N deren Ordnung (d. i. der Grad ihres Kurvensystems) und Π deren Geschlecht, so besitzt, solange $N \leqq 2\Pi - 2$, die Fläche nur eine endliche Anzahl von Ausnahmekurven, und diese sind von der ersten Art und schneiden einander nicht, sind also nach obigem durch geeignete Transformation von F zerstörbar. Sodann wird die Beziehung der Ausnahmekurven zum Prozeß der Adjunktion untersucht. Durch i-malige Adjunktion möge aus dem System $|O|$ der ebenen Schnitte von F ein System $|C^i|$ hervorgehen; enthält das letztere feste Kurven, die für das Restsystem fundamental sind, so sind dies gerade alle die Ausnahmekurven erster Art auf F, deren Ordnung kleiner als i ist.

Im vierten Kapitel wenden sich die Verf. zur Behandlung der Hauptfrage nach den Flächen, für die der Prozeß der Adjunktion nach einer endlichen Anzahl von Malen versagt. Diese Frage steht in engstem Zusammenhange mit den Kriterien für die Transformierbarkeit einer Fläche F in eine Regelfläche. Diese lauten: 1. Eine F mit einem Büschel (irreduzibler) rationaler Kurven ist in eine Regelfläche transformierbar, deren Erzeugende den Kurven des Büschels entsprechen. 2. Eine F mit einem linearen Büschel (irreduzibler) elliptischer Kurven mit einfachem oder doppeltem Basispunkt ist rational und auf eine elliptische Regelfläche beziehbar. 3. Eine F mit einem linearen Büschel (irreduzibler) Kurven vom Geschlecht Zwei und Basispunkten von den Vielfachheiten $i_1, i_2, \dots$ $(\sum i > 2)$ ist rational und auf eine Regelfläche vom Geschlecht Eins oder Zwei beziehbar. 4. Eine F mit einem linearen System (irreduzibler) Kurven von dem Geschlecht $p > 2$ und der Dimension $r \geqq 3p - 5$ ist rational oder auf eine Regelfläche beziehbar. Nunmehr möge der Prozeß der Adjunktion, auf das System $|C|$ der ebenen Schnitte von F angewandt, nach einer endlichen Anzahl von Malen sein Ende erreichen. Zunächst hängt diese Erscheinung nicht von der projektiven Natur von F ab, da sie sich für jede Transformierte von F wiederholt.

Bezeichnet man mit $\pi, \pi', \dots, \pi^{(i)}$ die Geschlechter der Systeme $|C|, |C'|, \dots, |C^i|$ mit $n, n', \dots, n^{(i)}$ die Grade, so ist für ein gewisses s $\pi^{(s)} > \pi^{(s+1)}$, $n^{(s+1)} > 2\pi^{(s+1)} - 2$. Hieraus läßt sich die Invarianz der fraglichen Erscheinung in obigem Sinne folgern. Man darf ferner F so präpariert annehmen, daß auf F keine Ausnahmekurven erster Art liegen, deren Ordnung kleiner als i wäre. Man unterscheidet des weiteren zwei Hauptfälle, je nachdem die Invariante $\omega \leqq 1$ oder aber > 1 ist. Im ersten Falle nehmen die Zahlen

$$\pi^{(s-1)}, \pi^{(s)}, \pi^{(s+1)}, \dots, \pi^{(i)}$$

sukzessive ab, während die positiven Differenzen

$$\pi^{(s-1)} - \pi^{(s)},\ \pi^{(s)} - \pi^{(s+1)}, \dots$$

wachsen oder wenigstens nicht abnehmen. Dabei ist die erste jener Differenzen: $\pi^{(s-1)} - \pi^{(s)} \geqq 3(p+1)$ voraussetzbar. Für das letzte System $|C^i|$ wird $\varrho \leqq p+1$, $r \geqq 3\varrho$; das System ist also entweder irreduzibel, oder aber, wenn reduzibel, aus Kurven γ eines Büschels bestehend. Im ersteren Falle ist nach den obigen Kriterien F beziehbar auf eine Regelfläche vom Geschlecht ϱ; im letzteren Falle zeigt sich, daß die Kurven γ des gemeinten Büschels rational sind, daß also auch dann F auf eine Regelfläche beziehbar ist.

Im zweiten Hauptfalle $\omega > 1$ folgt, daß $n > 2\pi - 2$, $\pi > \pi'$ sein muß. Daraus läßt sich schließen, daß F keinen irrationalen Kurvenbüschel besitzen kann. Ferner ergibt sich, daß $r > 6p - 11$, mithin, solange $p \geqq 3$, auch $r \geqq 3\varrho - 5$. Dann aber ist wiederum Transformierbarkeit von F auf eine Regelfläche vorhanden. Endlich für $p = 0, 1, 2$ wird $\Pi = \omega$, $N = 4(\omega - 1)$, woraus das nämliche Ergebnis folgt.

"Demnach ist in allen Fällen, wo der Prozeß der Adjunktion, auf irgend ein lineares Kurvensystem von F angewandt, nach einer endlichen Anzahl von Malen sein Ende erreicht, die Fläche birational in eine (rationale oder irrationale) Regelfläche transformierbar."

Dieser Hauptsatz wird im folgenden Kapitel auch auf solche Fälle ausgedehnt, wo man annimmt, daß gewisse Kurvensysteme auf F nicht existieren.

Daraus fließen schöne Sätze über die Darstellbarkeit von Regelflächen. Ist z. B. eine algebraische Gleichung $f(x, y, z) = 0$ lösbar durch rationale Funktionen x, y, z von drei Parametern X, Y, t, wo zwischen X, Y eine algebraische Relation herrscht, so lassen sich auch jene Funktionen immer so wählen, daß sie rational umkehrbar sind. Ferner sei der wichtige Satz hervorgehoben, daß, wenn eine Fläche F *nicht* in eine Regelfläche transformierbar ist, sie stets so transformiert werden kann, daß sie gar keine Ausnahmekurven enthält.

Mit den gewonnenen Hülfsmitteln wird auch eine Lücke ausgefüllt in der Theorie der Flächen F, die eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit birationaler Transformationen *in sich* zulassen. Die bisherigen Untersuchungen darüber setzten stets voraus, daß die in Rede stehende Mannigfaltigkeit eine *Gruppe* bilde. Es ist aber die Frage, ob, abgesehen von den rationalen und Regelflächen, Flächen existieren, wo jene Mannigfaltigkeit *keine* Gruppe (endlicher Ordnung) bildet. Diese Frage wird hier in verneinendem Sinne entschieden.

Im Schlußkapitel wird noch die wesentliche Rolle besprochen, die das Lineargeschlecht $p^{(1)}$ bei der Transformierbarkeit von F in eine Regelfläche spielt. Besitzt z. B. F eine endliche Anzahl von Ausnahmekurven (ist also *nicht* auf eine Regelfläche beziehbar), und ist $p^{(1)} > 1$, so ist P_i für alle i jenseits einer gewissen Grenze stets positiv. Bezeichnet man endlich den größten Wert von ω als "linear-sekundäres Geschlecht" $\overline{p^{(1)}}$ so läßt sich das Kriterium der Transformierbarkeit von F in eine Regelfläche mit alleiniger Hülfe von $\overline{p^{(1)}}$ ausdrücken.

Das Mitgeteilte genüge, um dem Leser die Bedeutung der vorliegenden Arbeit ersichtlich zu machen.

Reviewer: Meyer, F., Prof. (Königsberg i. Pr.)

Full Text: DOI

References:

[1] Cfr.Enriques,Introduzione alla Geometria sopra una superficie algebrica. Memorie della Società italiana delle Scienze (dei XL), (serie III), tom. X, 1896, {\S}{\S} 9, 11.

[2] Cfr.Enriques, l. c., {\S} 5.

[3] Enriques, l. c., {\S} 13.

[4] Enriques, l. c., {\S} 15.

[5] Enriques, l. c., cap.1 III, IV e particolarmente {\S} 27.

[6] Cfr.Enriques, l. c., {\S} 25.

[7] L'invarianza del sistema canonico e quindi del genere è stata stabilita algebricamente dal sig.Noether nella MemoriaZur Theorie des eindeutigen Enlsprechens, Mathem. Annalen Bd. 2, 8. L'invarianza delle curve pluricanoniche e dei plurigeneri é stabilita daEnriques l. c., {\S} 39. Esempi di superficie conp g =0,P 2\>0 sono stati dati daEnriques l. c.;Castelnuovo,Sulle superficie di genere zero, Memorie della Società ital. d. Scienze (dei XL) (serie III), t. X (1896);Enriques,Sui piani doppi di genere lineare p (1)=1, Rendic, Accad. dei Lincei, 1898.

[8] Cfr.Noether,Sulle curve multiple di superficie algebriche, Annali di Matematica (serie 2), tom. V (1871).

[9] Enriques,Introduzione ..., citata, {\S} 40.

[10] Enriques, l. c.

[11] Castelnuovo,Alcune proprietà fondamentali ... Annali di Matematica (serie 2), tom. XXV (1897), n.o 29 e seg.

[12] Questo enunciato relativamente al casop g =p a (superficie regolari) si trova in una Nota del sig.Noether, Comptes Rendus de l'Ac. d. Sc., t. CIII, 1886. Della sua giustificazione, sempre pel caso delle superficie regolari, si è occupatoEnriques,Ricerche di geometria sulle superficie algebriche, IV, 2, Memorie dell'Accad. delle Scienze di Torino (1893). La dimostrazione generale del teorema fu data daCastelnuovo, l. c., n.o 34.

[13] Castelnuovo, l. c., n.i 35, 36.

[14] Cfr.Enriques,Introduzione ..., {\S} 41.

[15] Castelnuovo,Sul genere lineare ... Rendic. Accad. d. Lincei, giugno 1897.

[16] Cfr.Castelnuovo, l. c.

[17] Cfr.Segre,Intorno ad un carattere delle superficie ... Atti dell'Accad. d. Scienze di Torino, 1896. L'espressioneI per un fascio di sezioni piane di una superficie (dello spazioS 3) fu considerata dapprima dal Sig.Zeuthen, che ne mise in luce il carattere invariante sotto una forma un po diversa (V. il n.o 24 delleÉtudes géomélriques ... Mathem. Annalen, IV, 1871), e più tardi dal Sig.Noether (Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens ... Mathem. Annalen, VIII, 1874, pag. 526), il quale ne diede l'espressione per mezzo dei due generip a ,p (1) della superficie, come sarà indicato nel seguito.

[18] Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens... Mathem. Annalen VIII (1874), pag. 526.

[19] Enriques,Introduzione ..., {\S} 42.

[20] Il teorema fu dimostrato, pel caso in cui il fascio sia di genere 0, dal sig.Noether,Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen. Mathem. Annalen III (1870); e in modo completo daEnriques,Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali. Mathem. Annalen LII (1899).

[21] Castelnuovo edEnriques,Sulle condizioni di razionalità dei piani doppi, n.o 5, Rendic. d. Circolo Mat. di Palermo, XIV 1900;

cfr. una osservazione a piè di pagina nella Nota diCastelnuovo,Le trasformazioni generatrici ... Atti dell'Accad. d. Scienze di Torino, 1901.

[22] Atti dell'Accad. d. Scienze di Torino, 1894.

[23] Castelnuovo,Alcuni risultati ..., n.o 10. Memorie della Società italiana d. Scienze (dei XL), (serie III), tom. X, (1896).

[24] Sur quelques points de la thèorie ... Journal de Mathématiques (4.me s.e), X (1894), pag. 195.

[25] Castelnuovo,Sulla razionalità delle involuzioni piane. Mathem. Annalen, XLIV (1893). · Zbl 25.0970.02

[26] Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques, Journal de Mathématiques (4.me s.e) V (1889).

[27] Journal de Mathématiques (4.me s.e) IX (1893).

[28] Comptes Rendus de l'Acad. d. Sc., Juillet 1895.

[29] Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles, pag. 265 e seg. (Paris, Hermann, 1897).

[30] Cfr.Enriques,Introduzione ..., {\S} 41.

[31] Cfr.Enriques,Sui piani doppi di genere lineare p (1)=1. Rendic. della R. Accad. d. Lincei, 1898.

[32] Castelnuovo,Sul genere lineare di una superficie ... Rendic. della R. Accad. d. Lincei, giugno 1897; occorre però avvertire che in questa Nota sono scambiati gli aggettiviprincipale esecondario applicati ai generi lineari. La nuova dicitura adottata nel testo sembra la più conveniente.

[33] Castelnuovo,Sulle superficie di genere zero. Memorie della Società italiana delle Scienze (dei XL), (serie III), tom. X (1896).