Le Roy, É.

On divergent series and functions defined by a Taylor series. (Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor.) (French) JFM 31.0256.01

Toulouse Ann. (2) 2, 317-430 (1900).

I. Es handelt sich um die analytische Fortsetzung einer durch eine Taylor'sche Reihe definirten analytischen Function. Wenn eine Potenzreihe, welche einen Convergenzkreis besitzt, eine Function von einer wohl definirten Eigentümlichkeit darstellt und die Möglichkeit giebt, nach und nach alle Werte der Function zu berechnen, so sollen Merkmale gefunden werden, nach denen aus der Reihe selbst die Stetigkeitseigenschaften der Function abgelesen werden können.

II. Um die Werte einer durch ihre Taylor'sche Reihe gegebenen Function für alle Punkte, in welchen sie regulär ist, zu berechnen, werden die folgenden Sätze abgeleitet:

Ist T ein beliebiger endlicher Bereich, dessen Grenze in endlicher Entfernung von der vom Punkte $z = 1$ bis $z = \infty$ längs der reellen Axe führenden Geraden bleibt, und bezeichnet t einen reellen Parameter, der kleiner als 1 ist, so convergirt der Ausdruck $\sum\limits_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)} z^n$ gleichmässig gegen $\frac{1}{1-z}$, wenn t gegen 1 convergirt und z in T bleibt. — Ist eine in der Umgebung des Ursprungs holomorphe Function $f(z) = \sum\limits_0^\infty \alpha_n z^n$ gegeben, so convergirt der Ausdruck $\sum\limits_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)} \alpha_n z^n$ gleichmässig gegen $f(z)$, wenn t durch reelle Werte, welche kleiner als 1 sind, gegen 1 convergirt und z in T bleibt.

Die Function $f(z)$ kann innerhalb T mit beliebiger Annäherung durch ein Polynom dargestellt werden.

Die Reihe 1) $\sum\limits_0^\infty \alpha_n$ hat einen endlichen Modul, wenn die associirte Reihe 2) $\sum\limits_0^\infty \alpha_n z^n$ einen begrenzten Convergenzkreis hat. Dann ist die Hülfsreihe 3) $\sum\limits_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)} \alpha_n$ $(0 < t < 1)$ convergent. Ist L der Wert, gegen den diese Hülfsreihe convergirt, so heisst die Reihe 1) summirbar und L ihre Summe.

Wenn die Grössen α_n von einer Veränderlichen u abhängen, heisst 1) gleichmässig summirbar in einem Bereiche T, wenn die Reihe 3) gleichmässig gegen eine Grenze convergirt, sobald t gegen 1 convergirt und u in T sich befindet.

Eine Potenzreihe von endlichem Modul ist summirbar im natürlichen Existenzbereich der durch sie in der Umgebung des Ursprungs definirten Function $f(z)$.

III. Die analytische Fortsetzung einer Taylor'schen Reihe wird in der Weise hergestellt, dass aus der gegebenen Reihe ein anderer Ausdruck (ein bestimmtes Integral) abgeleitet wird, welches in der grösstmöglichen Ausdehnung convergent ist und in der Umgebung des Ursprungs dieselben Werte annimmt wie die ursprüngliche Reihe.

Es sei $f(z)$ die durch die Reihe $\sum\limits_0^\infty \alpha_n z^n$ mit dem Convergenzradius 1 definirte Function; gelingt es, eine Function $\varphi(x)$ zu bestimmen, so dass für alle positiven ganzzahligen Werte von n $\alpha_n = \int\limits_0^1 \varphi(x) x^n dx$ ist, so ist die analytische Fortsetzung $f(z) = \int\limits_0^1 \frac{\varphi(x)}{1-zx} dx$.

Oder man ordne der gegebenen Taylor'schen Reihe das Integral

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x) F(zx) dx$$

zu, wo $F(t)$ eine analytische, im Nullpunkte holomorphe Function von t bedeutet, deren Singularitäten t_0, t_1, t_2, ..., t_p sind. Ist $F(t)$ nicht eindeutig, so wird es eindeutig gemacht durch gerade, von den t_0, ..., t_p ins Unendliche gehende Unstetigkeitslinien, deren Verlängerungen durch den Nullpunkt gehen. Das

Integral ist in jedem Punkte, welcher nicht auf diesen Unstetigkeitslinien liegt, holomorph. $\varphi(x)$ sei eine analytische Function mit den isolirten singulären Punkten x_0, x_1, x_2, ..., x_p (ist $\varphi(x)$ nicht eindeutig, so wird es in derselben Weise eindeutig gemacht); dann ist $f(z)$ in jedem Punkte mit Ausnahme der Punkte t_p und $\frac{t_p}{x_p}$ holomorph. Aber die letzteren Punkte und der Nullpunkt sind für den Hauptzweig von $f(z)$ regulär und nur für die anderen Zweige singulär. Der Punkt ∞ ist im allgemeinen für alle Zweige ein singulärer Punkt.

IV. Ist $\varphi(z)=\sum\limits_1^\infty \frac{z^n}{n^p}$, wo der reelle Teil von p positiv ist, so ergiebt sich auf Grund der bekannten Formel

$$\frac{1}{n^p}=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^1\left(L\frac{1}{x}\right)^{p-1}x^{n-1}dx$$

die in der ganzen Ebene geltende Darstellung

$$\varphi(z)=\frac{z}{\Gamma(p)}\int_0^1\left(L\frac{1}{x}\right)^{p-1}\frac{dx}{1-zx}.$$

$\varphi(z)$ ist nicht eindeutig; ist $[\varphi(z)]$ der Hauptwert, d. h. derjenige, welcher in der Umgebung des Nullpunktes durch eine Potenzreihe dargestellt wird, und ist L der Zweig des Logarithmus, welcher sich für reelle und positive Werte auf den arithmetischen Wert reducirt, dann ist der allgemeine Ausdruck von $\varphi(z)$ gleich

$$[\varphi(z)]+\frac{2k\pi i}{\Gamma(p)}(Lz+2h\pi i)^{p-1},$$

wenn man einen k-maligen Umlauf um den Punkt $z=1$ und einen h-maligen um den Punkt $z=0$ zurücklegt.

Es werden einige einfache Fälle behandelt, in denen α_n eine analytische Function von n ist.

Es sei $\alpha_n=\sum\limits_0^\infty\frac{\lambda_p}{n^p}$. Die Reihe ist convergent, wenn n eine gewisse Grenze überschreitet; es sei $|\lambda_p|<\lambda^p$, wo λ eine passend gewählte positive Constante bedeutet. Dann ist

$$\alpha_n=\int_0^1\varphi(x)x^{n-1}dx+\lambda_0,\quad \varphi(x)=\sum_1^\infty\frac{\lambda_p\left(L\frac{1}{x}\right)^{p-1}}{\Gamma(p)}$$

und

$$f(z)=\sum_0^\infty\alpha_nz^n=\sum_0^{n_0}\alpha_nz^n+z\int_0^1\varphi(x)\frac{n_0x^{n_0}}{1-z^x}dx.$$

$f(z)$ ist eine nicht eindeutige, in jedem Punkte der Ebene mit Ausnahme von $z=1$ und $z=\infty$ holomorphe Function, deren Eigenschaften aus dem vorstehenden Ausdrucke abgeleitet werden können.

Auch die Fälle, dass α_x gleich $\sum\sum\frac{\lambda_{pq}}{(n+a_p)^{b_q}}$ oder $\sum\frac{\lambda_p}{n^2+\mu_p^2}$ oder gleich der logarithmischen Ableitung einer ganzen Function endlichen Geschlechts ist, lassen sich behandeln.

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Taylor'sche Reihe $\sum\alpha_nz^n$ eine in der ganzen Ebene eindeutige Function darstellt, welche nur eine begrenzte Zahl von singulären Punkten $\frac{1}{\lambda_0}$, $\frac{1}{\lambda_1}$, ..., $\frac{1}{\lambda_p0}$ besitzt, besteht darin, dass $\alpha_n=a_n+\sum\limits_0^\infty b_{ni}\lambda_i^n$ gesetzt werden kann und die Grössen $|a_n|^{\frac{1}{n}}$, $|\varDelta^nb_{0i}|^{\frac{1}{n}}$ für ein unendlich grosses n gegen Null convergiren.

Ist $\alpha_n=\sum\limits_0^\infty\frac{\lambda_p}{p!}n^p$, wo $\sum\limits_0^\infty\lambda_pa^p$ eine ganze Function von a bedeutet, so definirt $\sum\alpha_nz^n$ eine eindeutige Function $f(z)$, welche im Endlichen nur den singulären Punkt $z=1$ hat, im Unendlichen aber regulär ist. Beispiele: $\alpha_n=\frac{1}{1+n}g\left(\frac{1}{n+1}\right)J_0(2i\sqrt{n})$, wo J_0 eine Bessel'sche und g eine holomorphe Function bezeichnet und $\alpha_n=e^{\sqrt[3]{n}}$.

Es sei $\alpha_n=\sum\limits_0^\infty\frac{\lambda_p}{p!}n^p$; die Reihe $\sum\limits_0^\infty\lambda_pa^p$ habe einen bestimmten Convergenzkreis, und a sei so gewählt, dass

$$\varphi(\Theta) = \frac{1}{2}\lambda_0 + \sum_1^\infty \lambda_p a^p \cos p\Theta$$

convergent ist. Setzt man dann:

$$e^{\frac{a}{n}\cos\Theta} \cos\left(\frac{n}{a}\sin\Theta\right) = \sum_0^\infty \frac{1}{p!}\frac{n^p}{a^p}\cos p\Theta,$$

so wird

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(\Theta) e^{\frac{n}{a}\cos\Theta}\cos\left(\frac{n}{a}\sin\Theta\right)d\Theta,$$

$$f(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(\Theta)\frac{1 - ze^{\frac{\cos\Theta}{a}}\cos\left(\frac{\sin\Theta}{a}\right)}{1 - 2ze^{\frac{\cos\Theta}{a}}\cos\left(\frac{\sin\Theta}{a}\right) + z^2 e^{\frac{2\cos\Theta}{a}}}d\Theta,$$

und $f(z)$ ist eindeutig und holomorph in demjenigen Teile der Ebene, welcher auf derselben Seite von einer gewissen Curve liegt wie der Nullpunkt.

Ist $\alpha_n = \sum\limits_0^\infty \lambda_p \left(\frac{n}{n+1}\right)^p$ eine analytische Function, die für alle Werte von n, deren reeller Teil grösser als $-\frac{1}{2}$ ist, holomorph ist, und ist $\sum\limits_0^\infty \lambda_p$ entweder absolut convergent oder wenigstens summirbar im Borel'schen Sinne, so ist die analytische Fortsetzung der durch $f(z) = \sum\limits_0^\infty \alpha_n z^n$ definirten Function von der Form

$$f(z) = \alpha_0 + \frac{\lambda_0 z}{1 - z} + \int_0^\infty e^{-x}\sum_1^\infty e^{-\frac{x}{n}} z^n \sum_0^\infty \frac{\lambda_{p+1}}{p!}dx;$$

$f(z)$ ist demnach eine analytische Function, welche in der ganzen Ebene holomorph ist; ausgenommen sind vielleicht die reellen Werte von z, die grösser als 1 sind.

Die allgemeine Methode ist folgende: Es sei die Reihe $f(z) = \sum\limits_0^\infty \alpha_n z^n$ in der Umgebung des Nullpunktes convergent, $\alpha(t) = \sum\limits_0^\infty \lambda_p t^p$ eine für kleine Werte von t holomorphe Function, deren singuläre Punkte sämtlich auf der linken Seite der imaginären Axe der Ebene t liegen. Es wird $\alpha_n = \alpha(n)$ gesetzt und die auf der Borel'schen Methode der Summation der divergenten Reihen beruhende Formel

$$\alpha_n = \int_0^\infty e^{-a}G(an)da \text{ mit } G(an) = \sum_0^\infty \frac{\lambda_p a^p n^p}{p!}$$

genommen, welche für alle Werte von n, deren reeller Teil grösser als -1 ist, in einem Bereiche gilt, welcher die positive reelle Axe der Ebene n enthält; a ist eis positiver Parameter. Setzt man

$$\varphi(z, a) = \sum_0^\infty G(an)z^n,$$

so wird

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-a}\varphi(z, a)da, \quad G(an) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)}\frac{1}{x}\alpha()1xe^{nax}dx,$$

wo C eine geschlossene Curve bedeutet, in deren Innerem der Nullpunkt und die singulären Punkte von $\alpha()1x$ liegen; es wird

$$\varphi(z, a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)}\frac{1}{x}\alpha()1x\frac{dx}{1 - ze^{ax}}.$$

Die Unstetigkeitslinie ergiebt sich aus der Curve C durch die Formel $z = e^{-ax}$, und es muss der Punkt z auf derselben Seite dieser Unstetigkeitslinie liegen wie der Nullpunkt. (Der Fall, dass $t = -1$ die einzige Singularität von $\alpha(t)$ ist, wird besonders behandelt.) Es ergiebt sich der folgende Satz:

Die Function $\sum\limits_0^\infty \alpha_n z^n$ ist holomorph in der ganzen Ebene; ausgenommen sind vielleicht die reellen Werte von z, welche grösser als 1 sind, falls für $n=\varrho e^{i\omega}$ der allgemeine Coefficient α_n eine analytische und für $\varrho>\varrho_0$ und $|\omega|<\omega_0$ holomorphe Function von n ist (ϱ_0 und ω_0 sind zwei beliebige positive Zahlen), und falls die Grösse $\frac{L|\alpha_n|}{\varrho}$ zur oberen Grenze 0 hat, wenn ϱ unendlich wird, während $|\omega|<\omega_0$ bleibt.

Ist das Verhältnis $\alpha_{n+1}:\alpha^n$ in eine Reihe $1+\sum\limits_1^\infty(\lambda_p:n^p)$ entwickelbar, welche für hinreichend grosse Werte des Moduls von n convergirt, so ist die durch die Reihe $\sum\limits_0^\infty \alpha_n z^n$ definirte analytische Function holomorph in der ganzen Ebene; ausgenommen sind vielleicht die reellen Werte von z, welche grösser als 1 sind.

V. In derselben Weise wie in IV lassen sich andere Reihen behandeln, z. B. $\sum\limits_0^\infty z^n \Delta^n\alpha_0$, wo $\Delta^n\alpha_0=\int\limits_0^1\varphi(x)(x-1)^n dx$ ist; $\sum\limits_0^\infty X_n[(\alpha)]z^n$, wo $X_n[(\alpha)]$ das Resultat der Substitution von α_p für x^p in das Legendresche Polynom $X_n(x)$ bedeutet; $\sum\limits_0^\infty \beta_n z^n$, wo $\beta_n=\sum\limits_0^\infty\frac{\lambda_p}{p!}\alpha_n^p$ ist, λ_p eine Constante und α_n^p die $p$te Ableitung von α_n nach n bedeutet; $\sum\limits_0^\infty P(a_n,b_n,\dots,l_n)z^n$, wo P ein Polynom, $\sum\limits_0^\infty a_n z^n$, $\sum\limits_0^\infty b_n z^n$, ..., $\sum\limits_0^\infty l_n z^n$ Reihen bedeuten, welche nach der in IV gegebenen Methode behandelt werden können.

VI. Auf Grund der Eigenschaften der durch die Gleichungen

$$D_n=\frac{d^n(xe^{-x})}{dx^n}=(-1)^n e^{-x}P_n(x),$$

$$P_n(x)=x^n-\frac{n^2}{1}x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{1.2}x^{n-2}-\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1.2.3}x^{n-3}+\cdots+(-1)^n n!$$

definirten Function $P_n(x)$, namentlich der Darstellung

$$D_n=\int_0^\infty e^{-y}y^n J_0(2\sqrt{xy})dy=\sum_0^\infty\frac{(-1)^p x^p}{(p!)^2}\Gamma(n+p+1),$$

wo $J_0(2\sqrt{t})=\sum\limits_0^\infty\frac{(-1)^p t^p}{(p!)^2}$ ist, wird das Stieltjes'sche Problem der Momente: "Wenn n Grössen α_1, α_2, ..., α_n gegeben sind, so soll eine im Intervall $(0,+\infty)$ integrirbare Function $\varphi(x)$ bestimmt werden, so dass $\alpha_n=\int\limits_0^\infty\varphi(x)x^n dx$ ist", formell gelöst in der Form:

$$\varphi(x)=\int_0^\infty J_0(2\sqrt{xy}\sum_0^\infty(-1)^n\frac{\alpha_n}{(n!)^2}y^n dy.$$

Die Lösung wird discutirt, und es ergiebt sich:

Das Problem der Momente ist durch die in IV entwickelte Methode gelöst für die Zahlen 1) $\alpha_n=n!G(n)$; 2) $\alpha_n=n!G(n)\int\limits_0^1 f(t)t^n dt$, wo G_n eine ganze Function bedeutet, deren Ordnung kleiner als 1 ist; 3) $\alpha=n!a_n$, wo a_n der allgemeine Coefficient einer Taylor'schen Entwickelung ist, welche nach der in IV gegebenen Methode behandelt werden kann.

VII. Unter den Anwendungen ist hervorzuheben die Feststellung, inwiefern $\sum\limits_0^\infty\alpha_n\cos nz$, wo $\alpha_n=\int\limits_0^1\varphi(x)x^n dx$ ist, eine analytische Function ist.

VIII. Für die divergenten Reihen ordnet der Verf. der divergenten numerischen Reihe $\sum\limits_0^\infty\alpha_n$ die Potenzreihe $\sum\limits_0^\infty\alpha_n z^n$ zu. Wenn dann die hierdurch definirte Function $f(z)$ in der ganzen Ebene (mit Ausnahme der vereinzelt liegenden singulären Punkte) holomorph ist, so nennt er die numerische Reihe summirbar und $f(l)$ ihre Summe. Ist $\sum_0^\infty(\alpha_n - \alpha_{n-1})$ summirbar, so heisst die Summe die verallgemeinerte Grenze von α_n.

Die Summe einer summirbaren numerischen Reihe $\sum_0^\infty \alpha_n$ ist der Grenzwert, welchen der Ausdruck $\sum_0^\infty \frac{\Gamma(nt+1)}{\Gamma(n+1)}\alpha_n$ annimmt, wenn t durch reelle Werte bis 1 wächst.

Ist α_n eine analytische Function einer complexen Veränderlichen u, die holomorph ist, wenn n beliebig ist und u in einem Bereiche T sich befindet, so convergirt dieser Ausdruck gleichmässig gegen eine in T holomorphe analytische Function von u.

$$\text{Beispiel: } \sum_0^\infty a_n e^{inu}.$$

Ist die Reihe $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ nur für $z = 0$ convergent, und kann α_n auf die Form $a_n \int_0^\infty \varphi(x)x^n dx$ gebracht werden, wo $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ einen endlichen Convergenzradius hat und eine Function $F(z)$ darstellt, für welche der Convergenzkreis keine Unstetigkeitslinie ist, so ist die Reihe $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$ summirbar und hat die Function $f(z) = \int_0^\infty \varphi(x)F(zx)dx$ zur Summe; $f(z)$ ist eine analytische und in dem "Regularitäts-Winkel" holomorphe Function.

Eine Potenzreihe $p$ter Ordnung wird erklärt als eine Reihe $\sum_0^\infty \alpha_n z^n$, für welche $\alpha_n = \Gamma(pn+1)a_n$ ist, wenn a_n den allgemeinen Coefficienten einer Potenzreihe bedeutet, deren Convergenzradius weder 0 noch ∞ ist; für ein positives p ist eine solche Reihe divergent; sie heisst summirbar in einem Winkel α (dessen Scheitel der Nullpunkt ist), wenn ihr eine im Innern des Winkels α holomorphe Function zugeordnet werden kann. Für sie gelten die Sätze:

Die summirbaren divergenten Reihen können wie convergente Reihen behandelt werden.

Wenn eine summirbare divergente Reihe formell einer algebraischen Differentialgleichung genügt, so ist dies hinreichend, um ein wirkliches Integral zu definiren.

Man kann zwei in demselben Winkel summirbare Reihen ebenso wie zwei convergente Reihen mit einander multipliciren.

Die summirbaren Reihen gehören zur Kategorie der Poincaré'schen asymptotischen Reihen.

Reviewer: Weltzien, Prof. (Zehlendorf)

MSC:

40C15 Function-theoretic methods (including power series methods and semi-continuous methods) for summability

Keywords:

Summation of divergent series

Full Text: DOI Numdam Numdam EuDML