Servant, M.

Essay on divergent series. (Essai sur les séries divergentes.) (French) JFM 30.0236.01

Toulouse Ann. (2) 1, 117-175 (1899).

Es handelt sich um die Eigenschaften einer analytischen Function, welche durch eine Taylor'sche Reihe $f(z) = \sum c_n z^n$ mit einem endlichen, von Null verschiedenen Convergenzradius definirt ist, im ganzen Existenzbereich der Function, namentlich um die Berechnung ihrer singulären Punkte, ihrer Nullstellen und ihres numerischen Wertes in einem beliebigen Punkte.

Verbindet man den Nullpunkt mit den verschiedenen singulären Punkten α_1, α_2, ... von $f(z)$, so bestimmen die in ihnen auf den Verbindungslinien errichteten Lote das Summirbarkeitspolygon. Hat $f(z)$ in einer Fläche C, die den Convergenzkreis enthält, nur Pole und ist $E(az) = \sum \frac{c_n a^n z^n}{n!}$ die von Borel eingeführte adjungirte Function von $f(z)$, so ist

$$c_n = \frac{A_{m0}}{\alpha_0^{n+m+1}}(n+1)\cdots(n+m) + \frac{A_{m-10}}{\alpha_0^{n+m}}(n+1)\cdots(n+m-1) + \cdots + \frac{A_{m1}}{\alpha_1^{n+m+1}}(n+1) + \cdots + b_n,$$

$$f(z) = \sum \frac{A_{m\nu}}{(\alpha_\nu - z)^(m+1)} + \varphi(z),$$

$$E(az) = \sum \frac{A_{m\nu}}{\alpha_\nu}\varphi_m()az\alpha e^{a\frac{z}{\alpha_\nu}} + E'(az).$$

Darin ist $\varphi(z) = \sum b_n z^n$ eine innerhalb C holomorphe Function und hat einen grösseren Convergenzkreis; $E'(az)$ ist die adjungirte Function von $\varphi(z)$.

Sind nun die α von der Art, dass man z in C so bestimmen kann, dass der reelle Bestandteil von $\left|\frac{z}{\alpha_\nu} - \frac{z}{\alpha_0}\right| < 0$, derjenige von $\left|\frac{z}{\alpha_0} - 1\right| > 0$ ist, so ist

$$\lim_{a=+\infty} E(az)^{\frac{1}{\alpha}} = e^{\frac{z}{\alpha_0}}.$$

In dieser Weise kann man die auf den Seiten des Summirbarkeitspolygons gelegenen Pole berechnen, dann auch die singulären Punkte von

$$\varphi(z) = \int_0^1 V(t)f(zt)dt,$$

ebenso die logarithmischen Punkte, die kritischen Punkte von der Form

$$\frac{A_\nu}{\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^{\omega_\nu+1}}, \text{ u. s. w.}$$

Wenn die Singularitäten der Reihe $\sum u_n(z)$ durch die Gleichungen $f(z,1) = 0$ $(\nu = 1, 2, \dots)$ gegeben sind, so werden die Singularitäten der Reihe $\sum c_n u_n(z)$ durch die Gleichungen $f_\nu\left(z, \frac{1}{\alpha_i}\right) = 0$ gegeben, wo die α die singulären Punkte von $\sum c_n y^n$ sind.

Wenn $f(z) = \sum a_n z^n$ in einem zum Convergenzkreis concentrischen Kreise vom Radius ϱ nur Pole hat, so kann man die Coefficienten eines Polynoms $P_q(z) = 1 + A'z + A^{(2)}z^2 + \cdots A^{(q)}z^q$ so bestimmen, dass das Product $P_q(z)f(z)$ in diesem Kreise holomorph ist, und man kann den Wert von $f(z)$ in einem beliebigen Punkte innerhalb dieses Kreises berechnen; dazu braucht man nicht die Coefficienten a_n selbst, sondern nur die Werte von $u_n = a_n z^n$ zu kennen. Dasselbe gilt für Punkte des Snmmirbarkeitspolygons.

Wenn die Functionen $f(z) = \sum C_n z^n$ und $\varphi(z) = \sum \delta_n z^n$ die singulären Punkte α_1, α_2, ..., bezüglich β_1,

β_2, ... haben, so folgt aus der Cauchy'schen Formel für die Function $F(z) = \sum C_n \delta_n z^n$

$$F(z) = \int_C \frac{f(t)}{t} \varphi() zt \, dt,$$

wo C eine einfach zusammenhängende, den Nullpunkt und den Punkt z umschliessende Curve ist, für welche $t = \alpha_i$ und $t = \frac{z}{\beta_i}$ $(i = 1, 2, \dots)$ äussere Punkte sind, und längs deren man $f(t)$ und $\varphi()zt$ summiren kann; dann kann man den Wert von $F(z)$ für den Punkt z berechnen.

Ist S_n die Summe der n ersten Glieder einer Reihe, a ein reeller Parameter, so ist, wenn nach Borel

$$\theta(a) = e^{-a} \sum \frac{a_n S_n}{n!}$$

gesetzt wird, $\lim \theta(a)$ für $a = \infty$ gleich S_n oder gleich der analytischen Fortsetzung von S_n, je nachdem $\lim \theta(a)$ existirt oder nicht.

Verbindet man den Nullpunkt mit den verschiedenen singulären Punkten und errichtet in den Endpunkten auf diesen Geraden die Lote, so erhält man den Summirbarkeitsbereich, d. h. den Bereich, in welchem $\theta(a)$ convergirt.

Aehnliche Eigenschaften wie $\theta(a)$ hat

$$\theta_p(a) = e^{-a_p} \sum \frac{a^{pn}}{n!} S_{pn};$$

es sind dann die Curven $\frac{\varrho}{a} \cos(\theta - \omega) = 1$ durch $\frac{\varrho^p}{\alpha^p} \cos p(\theta - \omega) = 1$ zu ersetzen (ϱ, ω gehören zum singulären Punkt).

Statt $\theta(a)$ können auch andere Functionen, z. B.

$$\sum_{p_\nu} A_\nu e^{a_\nu a^p} \text{ oder } e^{\sqrt{a}} + e^{-\sqrt{a}} \text{ oder } \sum_{\nu=0}^{p} e^{C_\nu}, \quad C_\nu^p - a^q = 0$$

gewählt werden; im letzten Falle sind die Seiten des Summirbarkeitspolygons die Curven $\left(\frac{\varrho}{\alpha}\right)^{\frac{q}{p}} \cos \frac{q}{p}(\theta - \omega) = 1$.

Sind Γ_1, Γ_2, ..., Γ_p die Summirbarkeitsbereiche von θ_1, θ_2, ..., θ_p, und liegt z im Innern von einem oder mehreren der Γ, so ist

$$\lim \frac{\theta_1^{-1}(a) + \theta_2^{-1}(a) + \cdots + \theta_p^{-1}(a)}{\theta_1^{-2}(a) + \theta_2^{-2}(a) + \cdots + \theta_p^{-2}(a)}$$

gleich der Summe S der zu summirenden Reihe; dieser Grenzwert ist unbestimmt, wenn z auf einer der die Bereiche Γ_1, ..., Γ_p begrenzenden Curven oder ausserhalb aller Curven liegt.

Man kann also eine Function, welche nur isolirte singuläre Punkte hat, in der ganzen Ebene summiren mit Ausnahme einer Anzahl von Linien.

Nach weiterer Bildung von Ausdrücken ähnlicher Art wird gezeigt, dass die geometrische Reihe in jedem Punkt der Ebene summirt werden kann.

Ist eine analytische Function durch eine Taylor'sche Reihe

$$\varphi(z) = \sum a_n z^{nn}$$

Reviewer: Weltzien, Prof. (Zehlendorf)

MSC:

40C15 Function-theoretic methods (including power series methods and semicontinuous methods) for summability

Keywords:

Summation of series

Full Text: DOI Numdam EuDML