zbMATH Open
THE FIRST RESOURCE FOR MATHEMATICS

Mertens, F.

On an arithmetic function. (Ueber eine zahlentheoretische Function.) (German)

JFM 28.0177.01
Wien. Ber. 106, 761-830 (1897).

Es handelt sich hier um die Function $\sigma(n) = \mu(1) + \mu(2) + \cdots + \mu(n)$, wo $\mu(1) = 1$, $\mu(m) = 0$, falls m durch das Quadrat einer Primzahl > 1 teilbar ist, und $\mu(m) = (-1)^\nu$ ist, falls m das Product von ν ($\geqq 1$) verschiedenen Primzahlen ist. Verf. teilt eine Tabelle für $\sigma(n)$ von $n = 1$ bis $n = 10000$ mit, aus welcher $|\sigma(n)| < \sqrt{n}$ für alle $n > 1$ hervorgeht; doch hat das hierin liegende Gesetz noch nicht allgemein bewiesen werden können. Bei Aufstellung der Tabelle machte Verf. von den Formeln

$$\mu(1)E(n) + \mu(2)E(n/2) + \cdots + \mu(g)E(n/g) + \sigma(n/1) + \sigma(n/2) + \cdots + \sigma(n/g) - g\sigma(g) = 1\,,$$

$$\sigma(n) = 2\sigma(g) - \sum_{r,\,s} \mu(r)\mu(s)E(n/rs)$$

$$(r,\ s = 1, 2, \dots, g)$$

Gebrauch, in denen $g = E(\sqrt{n})$ ist und für $\sigma(E(n/k))$ kurz $\sigma(n/k)$ geschrieben ist. Andererseits dienen dem Verf. die Entwickelungen über $\sigma(n)$, um zu Angaben über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze zu gelangen. Er macht hierbei Gebrauch von der Function $\theta(x) = \sum \nu \log p$, summirt über alle Primzahlen $p \leqq x$, wo ν als grösster ganzzahliger Exponent so zu bestimmen ist, dass $p^\nu \leqq x$ ist. Diese Function hängt mit $\mu(k)$ zusammen durch:

$$\theta(n) = -\sum_{k=1}^{n} \mu(k)E(n/k)\log k.$$

Andererseits wird zur weiteren Erforschung von $\theta(n)$ noch die zahlentheoretische Function:

$$L(s) = -\sum_{k=1}^{s} \mu(k)\frac{\log k}{k}$$

herangezogen, für welche der Verf. bei wachsendem Argumente $s = n$ den asymptotischen Wert 1 bis auf Grössen der Ordnung $n^{-\frac{1}{4}} \log n$ findet. Der Zusammenhang zwischen L und θ, welchen der Verf. ausführlich erörtert, gestattet (unter Voraussetzung der Gültigkeit von $|\sigma(m)| < \sqrt{m}$ für θ die asymptotische Darstellung $\theta(n) = n + \Delta$, wo Δ von der Ordnung $n^{\frac{3}{4}} \log n$ ist. Der Zusammenhang mit der Anzahl aller Primzahlen $\leqq n$ wird alsdann durch die Function:

$$\chi(n) = \frac{\theta(2) - \theta(1)}{\log 2} + \frac{\theta(3) - \theta(2)}{\log 3} + \cdots + \frac{\theta(n) - \theta(n-1)}{\log n}$$

gewonnen, für welche sich die asymptotische Darstellung

$$\chi(n) = \int_2^n \frac{dx}{\log x} + \delta$$

mit δ von der Ordnung $n^{\frac{3}{4}}$ ergiebt; $\chi(n)$ liefert geradezu bis auf Grössen der Ordnung $n^{\frac{3}{4}}$ die Anzahl aller Primzahlen $\leqq n$.

Mit Riemann's Function $\zeta(z)$ hängt $\mu(k)$ in der Art zusammen, dass für alle Werte z mit einem reellen Bestandteil > 1

$$f(z) = \frac{\mu(1)}{1^z} + \frac{\mu(2)}{2^z} + \frac{\mu(3)}{3^z} + \cdots$$

den reciproken Wert von $\zeta(z)$ liefert. Die über das Verschwinden von $\zeta(z)$ hier gezogenen Schlüsse basiren

© 2023 FIZ Karlsruhe GmbH

dann wieder auf der leider noch unbewiesenen Voraussetzung $|\sigma(m)| < \sqrt{m}$.

Reviewer: Fricke, Prof. (Braunschweig)

MSC:

11A25 Arithmetic functions; related numbers; inversion formulas

Cited in **8** Reviews
Cited in **6** Documents

Keywords:

Mobius function

© 2023 FIZ Karlsruhe GmbH