Picard, É.; Simart, G.

Theory of algebraic functions of two independent variables, Vol. 1. (Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. Tome I.) (French) JFM 28.0327.01

Paris: Gauthier-Villars et Fils. VI + 246 S. gr. 8° (1897).

Dass die Theorie der algebraischen Functionen mehrerer Veränderlichen trotz der wertvollen Arbeiten von Clebsch und Noether, Poincaré und Picard, Castelnuovo und Enriques erst in ihren Anfängen steht, kann nicht Wunder nehmen. Die Functionen einer einzigen Veränderlichen sind gegenüber den Functionen von beliebig vielen Veränderlichen ein „singulärer Fall", und die Vereinfachungen, die in diesem singulären Falle eintreten, sind so erheblich, dass der Uebergang zu dem allgemeinen Fall ganz neue analytische Hülfsmittel erfordert. Mit der Schwierigkeit wächst freilich der Reiz der Forschung, die gerade auf dem Gebiete der algebraischen Functionen mehrerer Veränderlichen reiche Ausbeute verspricht, und es ist daher ein dankenswertes Unternehmen, dass Picard und Simart in dem vorliegenden Werke, das auf zwei Bände berechnet ist, eine Uebersicht über den Stand unseres Wissens von diesem Gegenstande geben und so den Zutritt zu einer in hoffnungsvoller Entwicklung begriffenen Disciplin erleichtern.

Das Thema des ersten Bandes lässt sich kurz dahin formuliren, dass es gilt, Riemann's Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen auf algebraische Functionen von zwei Veränderlichen zu verallgemeinern, eine Ausdehnung, die übrigens Riemann, wie sein Nachlass gezeigt hat, bereits im Auge gehabt zu haben scheint.

Die Grundlage der Riemann'schen Theorie bildet die Conception der Klassen algebraischer Curven. Zwei solche Curven $f(x,y)=0$, $\varphi(\xi,\eta)=0$ gehören zu derselben Klasse, wenn sie sich Punkt für Punkt entsprechen, das heisst, wenn Gleichungen der Form $\xi=\Xi(x,y)$, $\eta=H(x,y)$, in denen Ξ und H rationale Functionen ihrer Argumente bedeuten, ein solches Entsprechen zwischen den Punkten der beiden Curven vermitteln können, dass umgekehrt vermöge der Gleichungen $f=0$, $\varphi=0$: $x=X(\xi,\eta)$, $y=Y(\xi,\eta)$ wird, wo X und Y wiederum rationale Functionen ihrer Argumente bedeuten. Es handelt sich alsdann darum, Eigenschaften zu finden, die allen Curven einer Klasse gemeinsam sind, also eine Invariantentheorie der algebraischen Curven gegenüber den birationalen Transformationen zu entwickeln. Eine solche Invariante ist die Zahl p, die Clebsch das Geschlecht der Curve genannt hat. Alle Curven derselben Klasse haben dasselbe Geschlecht; aber bei der Bestimmung aller algebraischen Curven des gegebenen Geschlechtes p bleiben $3p-3$ willkürliche Constanten übrig, die Moduln, deren Werte die einzelnen Klassen charakterisiren und die wie p die Eigenschaft der Invarianz besitzen.

In ähnlicher Weise kann man bei den algebraischen Flächen vorgehen. Zwei solche Flächen: $f(x,y,z)=0$, $\varphi(\xi,\eta,\zeta)=0$ sollen zu derselben Klasse gehören, wenn sie sich Punkt für Punkt entsprechen, das heisst, wenn Gleichungen der Form $\xi=\Xi(x,y,z)$, $\eta=H(x,y,z)$, $\zeta=Z(x,y,z)$, in denen Ξ, H, Z rationale Functionen ihrer Argumente bedeuten, ein solches Entsprechen zwischen den Punkten der beiden Flächen vermitteln können, dass umgekehrt vermöge der Gleichungen $f=0$, $\varphi=0$: $x=X(\xi,\eta,\zeta)$, $y=Y(\xi,\eta,\zeta)$, $z=Z(\xi,\eta,\zeta)$ wird, wo X, Y, Z wieder rationale Functionen ihrer Argumente bedeuten. Man gelangt so zu der Forderung, eine Invariantentheorie der algebraischen Flächen gegenüber den birationalen Transformationen zu entwickeln, und zwar wird es zunächst darauf ankommen, invariante Zahlen zu finden, die der Riemann'schen Klassenzahl p entsprechen, und alsdann wird man auch nach den Moduln der algebraischen Flächen fragen. Das delicate Problem der Moduln wird in dem vorliegenden Bande nur flüchtig gestreift; es handelt sich in ihm wesentlich um die invarianten Zahlen.

Um zu ihnen zu gelangen, wird man die Methoden, die bei den algebraischen Curven zur Bestimmung der Zahl p dienen, in geeigneter Weise zu verallgemeinern haben. Diese Methoden lassen sich durch die Combination der Begriffe geometrisch und analytisch, transcendent und algebraisch charakterisiren. Transcendent und analytisch ist Riemann's Definition von p als der Anzahl der zu der Curve $f=0$ gehörigen linear unabhängigen Abel'schen Integrale erster (oder zweiter) Gattung, transcendent und geometrisch seine Definition von p vermöge der Analysis situs, nämlich durch den Zusammenhang der zu der Curve gehörigen Riemann'schen Fläche. Als algebraisch und geometrisch möchten wir Riemann's Formel $p=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-\delta$ ansprechen, die einer Beziehung zwischen der Ordnung der Curve n, der Anzahl ihrer Doppelpunkte δ und ihrem Geschlechte p angiebt. Zu dieser Formel gelangt man, indem p als die Anzahl der willkürlichen Coefficienten in der Gleichung der „adjungirten Curven" erklärt wird, nämlich der Curven der Ordnung $n-3$, die durch die Doppelpunkte von $f=0$ hindurchgehen. Als Ergänzung hierzu sind die späteren geometrischen Beweise für die Invarianz der durch jene Formel definirten Zahl p anzusehen, ebenso die schwierigen Untersuchungen über die Reduction der höheren Singularitäten, die den Uebergang zu den algebraisch-analytischen Methoden bilden. Diese hat hauptsächlich Weierstrass ausgebildet, der die „rationalen Functionen des Paares x, y" $R(x,y)$ auf algebraischem Wege zu beherrschen versuchte (Functionen mit gegebenen Null- oder Unendlichkeitsstellen, Lückensatz).

Bei dem gegenwärtigen Stande unserer Kenntnisse können für die Verallgemeinerung auf algebraische Flächen die algebraisch-analytischen Methoden nicht in Betracht kommen; denn der Ausbildung einer algebraischen Theorie der „rationalen Functionen des Tripels x, y, z", die der Weierstrass'schen Theorie der rationalen Functionen des Paares x, y parallel liefe, stellen sich dieselben Schwierigkeiten entgegen, die bewirkt haben, dass die Theorie der analytischen Functionen von zwei Veränderlichen bis jetzt ein Embryo geblieben ist. Betrachtungsweisen dieser Art, die vom Standpunkte der Methodik aus am höchsten stehen, bilden eben hier wie überall, den Schluss, nicht den Beginn der historischen Entwicklung.

Mehr Erfolg verspricht der algebraisch-geometrische Weg, den Clebsch (C. R. Dec. 1868) betreten hat, indem er das Theorem aussprach: Für eine algebraische Fläche der Ordnung n mit ordinären Singularitäten ist die Anzahl der willkürlichen Constanten in der Gleichung der „adjungirten Flächen", nämlich der Flächen der Ordnung $n-4$, die durch die Doppelcurven von $f=0$ gehen, eine Invariante gegenüber den birationalen Transformationen. Diese Anzahl, das „Flächengeschlecht", möge mit p_g bezeichnet werden. Während es nun gelungen ist, die höheren Singularitäten der algebraischen Curven zu reduciren, das heisst nachzuweisen, dass eine jede Curve dieser Art für den Zweck der Bestimmung ihres Geschlechtes als Grenzfall einer algebraischen Curve mit lauter ordinären Singularitäten (Doppelpunkten mit getrennten Tangenten) aufgefasst werden kann, hat sich herausgestellt, dass für algebraische Flächen keine solche Reduction möglich ist, und dass es daher keine numerische Formel für p_g giebt, die der Riemann'schen Formel für p entspräche. Es beruht das auf dem Umstande, dass, während die Singularitäten der Curven sich superponiren, also eine jede Singularität auf p so wirkt, als ob sie allein einträte, bei den Flächen die Wirkungen der Singularitäten auf p_g sich gegenseitig beeinflussen, so dass, wenn die Singularität S p_g um σ, S' um σ' vermindert, bei dem gleichzeitigen Auftreten von S und S' p_g um weniger als $\sigma+\sigma'$ abnehmen kann.

Noether, der zuerst einen (algebraischen) Beweis für die Invarianz von p_g gegeben hat, hat die wichtige Bemerkung gemacht, dass man dieselbe Zahl p_g auch auf transcendent-analytischem Wege erhält. Ebenso wie einer algebraischen Curve $f(x,y)=0$ die Abel'schen Integrale $\int R(x,y)\,dx$ zugeordnet sind, lassen sich einer algebraischen Fläche $f(x,y,z)=0$ die Doppelintegrale einer rationalen Function von x, y, z: $\iint R(x,y,z)\,dxdy$ zuordnen. Unter diesen Integralen giebt es wiederum Integrale erster Gattung. Man erhält sie, indem $R=Q\colon \partial f/\partial z$ gesetzt wird, wo Q ein „adjungirtes Polynom" der Ordnung $n-4$ bedeutet.

Es ist das Verdienst von Picard, auch den transcendent-geometrischen Weg eingeschlagen, also für die Ermittelung invarianter Zahlen die Analysis situs mehrfach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten herangezogen zu haben. Er findet so zwei neue Invarianten p_1 und p_2. Höchst merkwürdig ist es, dass die Invariante p_1 für gewisse zu der Fläche gehörige Integrale von Bedeutung ist, nämlich für die Integrale totaler Differentiale der Form $P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy$, wo P und Q rationale Functionen ihrer Argumente bezeichnen. Diese Erscheinung verdient um so mehr Beachtung, als, wie sogleich näher auszuführen sein wird, die Theorie dieser Integrale von der Theorie der Abel'schen Integrale toto coelo verschieden ist.

Für die Invariante p_2 wird kein analoger Satz hergleitet. Der Referent möchte der Vermutung Ausdruck geben, dass sie in enger Beziehung zu den Doppelintegralen zweiter Gattung steht; die Gründe hierfür genauer darzulegen, ist an dieser Stelle nicht möglich. Jedenfalls liegt hier ein Problem vor, das zu weiteren Untersuchungen auffordert (die inzwischen in der That von Picard angestellt worden sind).

Sieht man x, y, z als complexe Grössen an, so entspricht der algebraischen Fläche eine Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen M_4, die durch zwei Gleichungen aus einem ebenen Raume von sechs Dimensionen R_6, ausgeschieden wird. Nach den Untersuchungen von Betti und Poincaré wird nun der Zusammenhang einer durch Gleichungen aus einem ebenen Raume ausgeschiedenen M_n durch $n-1$ ganze Zahlen, p_1, p_2, ..., p_n die Ordnungen des Zusammenhanges, gekennzeichnet, die sich der Reihe nach auf die Beschaffenheit der in der M_n enthaltenen geschlossenen Mannigfaltigkeiten der Dimensionen 1, 2, ..., $n-1$ beziehen. Zwischen diesen Zahlen bestehen die Relationen von Poincaré:

$$p_m = p_{m-n} \quad (m=1,2,\dots,n).$$

Im besonderen ist daher für $n=4$: $p_1=p_3$, so dass für die algebraischen Flächen nur die Zahlen p_1

und p_2, in Betracht kommen. Die genauere Untersuchung zeigt, dass für die algebraischen Flächen im allgemeinen $p_1 = 1$ ist, während, wieder im allgemeinen, $p_2 > 3$ ausfällt.

Unter den Integralen $\int(Pdx + Qdy)$ unterscheidet Picard, wie bei den Abel'schen Integralen, Integrale erster, zweiter und dritter Gattung; die präcise Fassung der Definitionen erfordert freilich wegen der Singularitäten der Fläche einige Vorsicht. Es ergiebt sich alsdann der Fundamental-Satz: Ist $p_1 = 1$, so reduciren sich die Integrale zweiter Gattung sämtlich auf rationale Functionen von x, y, z; ist aber $p_1 > 1$, so giebt es genau $p_1 - 1$ linear unabhängige Integrale zweiter Gattung. Die Ermittelung dieser Integrale lässt sich unter allen Umständen auf die Aufgabe zurückführen, dass die rationalen Integrale eines Systems gewöhnlicher linearer homogener Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten bestimmt werden sollen. Damit ist zugleich ein zweiter Weg zur Bestimmung von p_1 gefunden, der nur Differentiationen und Eliminationen erfordert.

Integrale erster Gattung giebt es im allgemeinen überhaupt nicht. Die Bedingungen für die Existenz solcher Integrale lassen sich zwar auf eine elegante analytische Form bringen, jedoch lässt sich daraus keine allgemein gültige numerische Formel für ihre Anzahl herleiten. Im besondern findet man, dass die Flächen zweiter und dritter Ordnung mit Ausnahme der Kegel dritter Ordnung keine Integrale erster Gattung besitzen, und dass von den Flächen vierter Ordnung nur die Rotationsflächen, die Flächen mit zwei windschiefen Doppelgeraden und die Kegel sowie die projectiv darauf bezogenen Flächen ein, und zwar genau ein solches Integral besitzen; mehr als ein Integral dieser Art kann bei Flächen vierter Ordnung nicht auftreten.

Sehr grosse Schwierigkeiten bieten die Integrale dritter Gattung. Hier bleibt sogar die an der Schwelle der Untersuchung auftretende Frage unbeantwortet, ob für $p_1 = 1$ die Integrale dritter Gattung, ähnlich wie die Integrale zweiter Gattung, stets auf die endliche Form

$$R_0(x, y, z) + \sum_{\nu=1}^{\varrho} A_\nu \log R_\nu(x, y, z)$$

gebracht werden können, wo die $A_1, A_2, \ldots, A_\varrho$ Constanten bedeuten, während R_0, R_1, R_2, ..., R_ϱ rationale Functionen ihrer Argumente bezeichnen.

Die vorstehenden Ausführungen können und sollen nur einen Begriff von der Richtung geben, in der sich die Untersuchungen des Buches von Picard und Simart bewegen. Neben den angeführten Hauptsätzen findet man noch eine Fülle interessanter Details, auf die hier nicht eingegangen werden kann. Nur ein Umstand darf nicht verschwiegen werden: dass die Reihenfolge der Sätze in dem Buche eine wesentlich andere als in diesem Berichte ist. Die Verfasser, deren Darstellung ein Muster von Eleganz und Klarheit ist, haben, um das Verständnis zu erleichtern, drei einleitende Kapitel an die Spitze gestellt, die die mehrfachen Integrale in mehreren Veränderlichen, die Analysis situs mehrfach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten und die Integrale rationaler Functionen von zwei complexen Veränderlichen betreffen. Die Singularitäten und die Ordnungen des Zusammenhanges einer algebraischen Fläche bilden den Gegenstand des vierten Kapitels, an das sich die Theorie der Integrale von totalen Differentialen erster, zweiter und dritter Gattung schliesst (Kapitel V und VI). In den Schlusskapiteln VII und VIII wird über die Untersuchungen von Clebsch und Noether berichtet und die Theorie der Doppelintegrale erster Gattung entwickelt.

Der zweite Band soll ausser Ergänzungen zu dem ersten Anwendungen auf die Integralrechnung bringen; dann aber ist beabsichtigt, auf die neuen Untersuchungen von Castelnuovo und Enriques einzugehen, ein Plan, dessen Ausführung nur dringend zu wünschen ist.

Reviewer: Stäckel, Prof. (Kiel)

MSC:

14C30	Transcendental methods, Hodge theory (algebro-geometric aspects)	Cited in **6** Reviews
32J15	Compact complex surfaces	Cited in **13** Documents

Keywords:

Algebraic surface; genus; integrals; Betti numbers; Poincaré duality.