Arzelà, C.

On functions of lines. (Sulle funzioni di linee.) (Italian) JFM 26.0454.01

Bologna Mem. (5) V. 225-244 (1895).

Den vorliegenden Untersuchungen liegt ein System G von Functionen $u(x)$ der reellen Veränderlichen x zu Grunde, die auf ein bestimmtes Intervall $a \leqq x \leqq b$ eingeschränkt ist. Die Functionen $u(x)$, welche die Elemente des Systemes G bilden, sollen eindeutig und stetig sein und nur Werte annehmen, die zwischen zwei festen Grenzen l und L liegen. Von Wichtigkeit ist nun die folgende Begriffsbestimmung: Die das System G constituirenden Functionen $u(x)$ heissen "gleichartig stetig" (egualmente continue), wenn zu jeder positiven, beliebig kleinen Zahl σ die positive Zahl δ so bestimmt worden kann, dass in jedem Intervalle, dessen Länge kleiner als δ ist, die Schwankung jeder beliebigen, dem Systeme G angehörenden Function $u(x)$ kleiner als σ ist. Zunächst zeigt der Verfasser, dass die gleichartige Stetigkeit die Bedingung dafür ist, dass aus dem Systeme G eine Reihe von Functionen $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... herausgehoben werden kann, welche mit unendlich wachsendem Index gegen eine bestimmte Function $v(x)$ convergiren, und zwar gleichmässig für alle dem Intervalle $a \dots b$ angehörigen Werte von x. Jede solche Function $v(x)$ heisst eine "Grenzfunction" des Systemes G. Wenn jede Grenzfunction von G zu G gehört, so heisst das System G "abgeschlossen". In Bezug auf die gleichartige Stetigkeit ist noch zu erwähnen, dass dieselbe für ein System G sicher stattfindet, wenn für jedes Element $u(x)$ von G und je zwei dem Intervalle angehörende Werte x_1, x_2 der Differenzenquotient $\frac{u(x_1)-u(x_2)}{x_1-x_2}$ zwischen zwei festen endlichen Grenzen liegt. Wenn nach irgend einem Gesetze jedem Elemente $u(x)$ eines Systemes G ein bestimmter Zahlenwert zugeordnet ist, so ist dadurch eine "Function der Elemente von G" bestimmt. Dieser Begriff deckt sich mit dem der "Function von Linien", da das System der Functionen $u(x)$ geometrisch durch ein System von Linien dargestellt wird. Wenn G abgeschlossen ist, so heisst eine Function der Elemente von G stetig, falls der einer Grenzfunction $\lim u_n(x) = v(x)$ zugeordnete Wert die Grenze der den Functionen $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... zugeordneten Werte ist. Für die untere und obere Grenze der Werte einer Function der Elemente von G gilt ein Satz, welcher einem bekannten Weierstrass'schen Satze analog ist. Insbesondere hat man den Satz: Eine stetige Function der Elemente des abgeschlossenen Systemes G besitzt einen grössten und einen kleinsten Wert.

Die allgemeinen Sätze wendet der Verfasser schliesslich noch auf folgendes System Γ an: Eine Function $u(x)$ gehört dem Systeme Γ stets und nur dann an, wenn sie für $x = a$ und $x = b$ die festen Werte A resp. B annimmt, wenn sie ferner mit ihrer ersten und zweiten Ableitung stetig im Intervalle $a \dots b$ ist, wenn endlich ihre zweite Ableitung $u''(x)$ mindestens eine Nullstelle im Intervalle $a \dots b$ besitzt und der Differenzenquotient von $u''(x)$ beständig zwischen zwei festen endlichen Zahlen liegt. Der Verfasser beweist, dass dieses System Γ abgeschlossen ist und die ihm angehörigen Functionen gleichartig stetig sind. Der Maximalwert des absoluten Betrages von $u''(x)$ und der Wert des Integrales $\int_a^b [u'(x)]^2 dx$ sind Beispiele von stetigen Functionen der Elemente von Γ.

Reviewer: Hurwitz, Prof. (Zürich)

MSC:

26A99 Functions of one variable

Keywords:

Arzela's Theorem. Compact sets of continuous functions