Poincaré, H.

Analysis situs. (French) JFM 26.0541.07

J. Éc. Politech. (2) 1, 1-123 (1895).

In dieser Abhandlung, deren Resultate teilweise bereits in den C. R. 115 kurz angegeben sind (JFM 24.0506.02), giebt der Verfasser eine Ausdehnung der bekannten, für Riemann'sche Flächen und deren Functionen grundlegenden Definitionen und Sätze auf Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen. Er definirt insbesondere im ersten Teil ihre analytische Darstellung durch Gleichungen, resp. Ungleichungen oder aber durch unabhängige Parameter, ihre Scheidung in einseitige und zweiseitige auf Grund des Verhaltens der bezüglichen Functionaldeterminante bei Beschreibung geschlossener Wege, die auf den Flächen existirenden Integralfunctionen, die beim Schnitt von Mannigfaltigkeiten auftretenden Vorzeichenbestimmungen, die der Charakteristik in der Ebene, resp. der Summe der Punktcharaktere entsprechen und durch Functionaldeterminanten festgelegt werden, u. s. w. u. s. w., das letztere übrigens nur unter Annahme von zweiseitigen Flächen. Im zweiten Teil wendet sich der Verfasser zur Verallgemeinerung der gruppentheoretischen Formirungen. Er definirt die zu jeder M gehörige Gruppe von Substitutionen, die ein Functionssystem bei Beschreibung geschlossener Wege auf der M erleidet, die ihnen entsprechenden Fundamentalbereiche, endlich das Abbild dieser Bereiche, welches durch Aufsteigen zu dem um eine Dimension höheren Raume und durch Zusammenfalten der entsprechenden Grenzgebiete entsteht. Hierfür, sowie für die zugehörigen Gruppen wird eine grössere Zahl von Beispielen ausführlicher behandelt. Er untersucht dann schliesslich eingehend die Frage, ob eine Mannigfaltigkeit höherer Dimension durch die Betti'schen Zusammenhangszahlen im Sinne der Analysis situs eindeutig definirt ist. Die Antwort lautet, dass dies nicht der Fall ist; der Verfasser zeigt an verschiedenen Beispielen, dass man mit gegebenen Betti'schen Zahlen noch unendlich viele Mannigfaltigkeiten bilden kann, die im Sinne der Analysis situs nicht in einander defininirbar sind. Als besondere Resultate der Abhandlung sind noch zu nennen: erstens der Satz, dass für eine geschlossene Mannigfaltigkeit die gleichweit von den ersten und letzten abstehenden Betti'schen Zahlen einander gleich sind; zweitens die Ausdehnung des Theorems von Euler auf Polyeder von beliebigen Dimensionen und beliebigem Zusammenhang, jedoch unter der Annahme, dass alle Grenzgebiete der verschiedenen Dimensionen einfach zusammenhängend sind. Ist α_0 die Zahl der Ecken, α_1 die der Kanten, ..., α_p die der p-dimensionalen Grenzgebiete, so hat

$$N = \alpha_p - \alpha_{p-1} + \alpha_{p-2} - \cdots \mp \alpha_1 \mp \alpha_0,$$

wenn p gerade ist, den Wert

$$N = 3 - P_1 + P_2 - \cdots + P_{p-1},$$

wo die P_i die Betti'schen Zahlen sind; für ungerades p dagegen ist N stets gleich Null, welches auch die P_i sind.

Reviewer: Schönflies, Prof. (Göttingen)

MSC:

30-XX Functions of a complex variable