**von Dantscher, V.**
**Zur Theorie der Maxima und Minima einer Function von zwei Veränderlichen.** (German)
JFM 25.0467.02
Math. Ann. 42, 89-131 (1893).

Zur Lösung des Problems der Maxima und Minima einer Function von zwei Veränderlichen, $f(x, y)$, schlägt der Verfasser einen Weg ein, der principiell von dem von Scheeffer eingeschlagenen verschieden ist. Früher ersetzte man bei der Zurückführung des Problems in das Gebiet der Functionen einer Veränderlichen die Flächenumgebung der zu untersuchenden Stelle $P_0$ durch die Gesamtheit der Geraden durch $P_0$ in der Darstellungsebene und begnügte sich, zu untersuchen, ob auf jeder derselben $f(x_0, y_0)$ ein Maximum oder Minimum sei. Scheeffer neigte zu der Ansicht, dass dieses Verfahren überhaupt nicht zu einer befriedigenden Lösung des Problems führe. Der Verfasser zeigt nun, dass diese Methode doch brauchbar ist, wenn nur die Ausdehnung des Intervalles, in dem auf jeder Geraden, und zwar zu beiden Seiten von $P_0$, der Functionswert $f(x_0, y_0)$ grösser, bezw. kleiner als jeder Nachbarwert ist, berücksichtigt wird. Auf diese Weise ergeben sich die folgenden Resultate.

Ist die Function $f(x, y)$ in der Umgebung der Stelle $(x_0, y_0)$, für welche letztere die beiden ersten partiellen Ableitungen verschwinden, nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0 = h$, $y - y_0 = k$ entwickelbar, so setze man:
$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = g(h, k) = (h, k)_n + (h, k)_{n+1} + \cdots ,$$
wobei allgemein $(h,\, k)_n$ eine Form $n^{\text{ten}}$ Grades in $h$ und $k$ und $n \geqq 2$ ist. Wenn dann $(h,\, k)_n$ eine definite Form ist (was nur für ein gerades $n$ eintreten kann), so hat die Function $f$ an der Stelle $x_0$, $y_0$ ein Maximum oder ein Minimum, je nachdem die Form eine negative oder positive ist; ist die Form eine indefinite, so findet keines von beiden statt. Ist endlich die Form eine semidefinite mit $\mathfrak{m}$ reellen Linearfactoren $(k_m h - h_m k)$, $m = 1, 2, \dots, \mathfrak{m}$, so ist für jeden derselben besonders zu untersuchen, wie sich $g(h, k)$ bei der Annäherung von $\frac{k}{h}$ an $\frac{k_m}{h_m}$ bezw. von $\frac{h}{k}$ an $\frac{h_m}{k_m}$ verhält.

Setzt man $\frac{k}{h} = \frac{k_m}{h_m} + k'$, bezw. $\frac{h}{k} = \frac{h_m}{k_m} + h'$, so wird
$$\begin{aligned} g(k, k) &= h^n \left[ \left( 1, \frac{k_m}{h_m} + k' \right)_n + \left( 1, \frac{k_m}{h_m} + k' \right)_{n+1} h + \cdots \right] = h^n \chi_m(h, k') \\ &= k^n \left[ \left( \frac{h_m}{k_m} + h', 1 \right)_n + \left( \frac{h_m}{k_m} + h', 1 \right)_{n+1} k + \cdots \right] = k^n \chi_m(h', k) \end{aligned}$$
es genügt, eine der beiden Formen zu berücksichtigen, wenn $h_m$ und $k_m$ beide von Null verschieden sind. Beginnen nun sämtliche Functionen $\chi_m$ mit definiten Formen, so ist $f(x_0, y_0)$ ein Maximum, bezw. Minimum, wenn $(h,\, k)_n \leqq 0$, bezw. $\geqq 0$ ist. Beginnt aber auch nur eine der Functionen $\chi_m$ mit einer indefiniten Form, so findet keines von beiden statt. Beginnt keine der Functionen $\chi$ mit einer indefiniten Form, wohl aber eine oder mehrere $(\chi_s)$ mit einer semidefiniten Form, so ist für jede dieser Functionen $\chi_s$ weiter zu untersuchen, ob $\chi_s(0, 0)$ ein Maximum, bezw. Minimum ist oder nicht. Ist das erstere für alle Functionen $\chi_s$ der Fall, so ist $f(x_0, y_0)$ selbst ein Maximum oder Minimum, je nachdem $(h, k)_n \leqq 0$ oder $\geqq 0$ ist; ist aber auch für eine der Functionen $\chi_s$ dies nicht der Fall, so ist $f(x_0, y_0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum.

Treten nun unbeschränkt oft Entwickelungen mit semidefiniten Anfangsformen auf, so versagt das Verfahren. In diesem Falle zeigt der Verfasser, dass $g(0, 0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum ist. Die Schwierigkeit liegt also nur darin, dieses Versagen des Verfahrens festzustellen; ist dies aber gelungen, so ist damit schon entschieden, dass $g(0, 0)$ weder ein Maximum noch ein Minimum ist.

Reviewer: Haussner, Dr. (Würzburg)

**MSC:**

26B05 Continuity and differentiation questions



**Full Text:** DOI Link EuDML

## References:


[1] A. Genocchi, Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale, pubblicato con aggiunte dal Giuseppe Peano, Torino 1884, N. 133-136, p. XXIX.

[2] In der nachgelassenen Abhandlung: Theorie der Maxima und Minima einer Function von zwei Variabeln, Math. Ann. Bd.XXXV, p. 541?576.

[3] Weierstrass, Abhadl. a. d. Functionenlehre, Berlin, 1886, p. 111.