Graf, J. H.

Beiträge zur Auflösung von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten sowie von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denen gewisse bestimmte Integrale genügen. (German) JFM 25.0583.01

Math. Ann. XLV, 235-262 (1894).

Die Arbeit zerfällt in drei Teile. 1. Die Gleichung der Form

$$xy'' + (a+1)y' - y = 0$$

hat die Integrale

$$y_1 = F(a,x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{x^\lambda}{\lambda!\Gamma(a+\lambda+1)}, \quad y_2 = x^{-a}F(-a,x).$$

Auf den Typus dieser Gleichung werden die Gleichungen

$$x^2y'' + 2xy' + (x^2 - r(r+1))y = 0$$

und

$$x^2y'' + (a+1)xy' - bx^ry = 0$$

zurückgeführt und integrirt. Die Integrale der ersteren sind Bessel'sche Functionen der ersten Art.

2. Eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit linearen Coefficienten

$$(a_0x + b_0)y^{(n)} + (a_1x + b_1)y^{(n-1)} + \cdots + (a_nx + b_n)y = 0$$

sei gegeben, und es sei

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = \prod(x-\alpha), \quad g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n,$$

so lässt sich der Differentialgleichung durch ein bestimmtes Integral von der Form $y = \int e^{xt}\frac{h(t)}{f(t)}dt$ genügen, wo, falls die Wurzeln α der Gleichung $f(x) = 0$ verschieden sind und

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{A_\lambda}{x - \alpha_\lambda}$$

ist, $h(t) = \prod(t-\alpha_\lambda)^{A_\lambda}$, also y die Form hat $y = \int e^{xt}\prod(t-\alpha_\lambda)^{A_\lambda - 1}dt$. Die Grenzen sind so zu wählen, dass $e^{xt}\prod(t-\alpha_\lambda)^{A_\lambda}$ an ihnen verschwindet.

Nach dieser Methode wird die Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Coefficienten integrirt, die, falls die Wurzeln α_λ verschieden sind, auf $xy'' - (x-c)y' - ay = 0$ reducirt wird, wo die Wurzeln α_λ die Werte 0 und 1 und die A_λ resp. die Werte a und $c - a$ haben. Als Grenzen des bestimmten Integralss werden für das eine particuläre Integral 0 und 1 genommen; für das zweite particuläre Integral wird als Integrationsweg des bestimmten Integrals eine Schleife um die Pole 0 und 1 genommen, die von dem Punkte, wo $xt = -\infty$ ist, ausgeht und darin endet. Den Integralen werden noch besondere Darstellungen gegeben und einige Eigenschaften derselben entwickelt.

3. Es wird die Differentialgleichung zweiter Ordnung gebildet, der die Integralform $\int\varphi(t)(t-x)^ndt$ zukommt. Ein Specialfall, der näher untersucht wird, ist die Gleichung

$$(x^2 + fx + g)y'' + (hx + i)y' + ky = 0,$$

deren Integrale sich durch hypergeometrische Reihen darstellen lassen.

Reviewer: Hamburger, Prof. (Berlin)

Full Text: DOI EuDML

References:

[1] Math. Annalen Bd. 38, S. 228 ff.

[2] Math. Annalen Bd. 41, S. 174 ff.

[3] Vergl. L. Schläfli: Sopra un teorema di Jacobi recato a forma più generale ed applicato alla funzione cilindrica. Annali di Mat. Ser. IIa, Tom. V0, p. 203, 1871 und schon vorher in: Sulle relazioni tra diversi integrali definiti che giovano ad esprimere la soluzione generale della equazione di Riccati. Annali di Math. II. Ser. Tom. III, p. 232.

[4] J. Dienger, Differential- und Integralrechnung. Stuttgart 1857, S. 347. · Zbl 034.0958cj

[5] Dienger, S. 173.

[6] Vergl. L. Pochhammer, diese Annalen Bd. 38, S. 224 ff. und A. Weiler, Crelle's Journal Bd. 51, S. 107 ff.

[7] Vergleiche Dienger, S. 349.