Schur, F.

Ueber den analytischen Charakter der eine endliche continuirliche Transformationsgruppe darstellenden Functionen. (German) JFM 25.0632.01

Math. Ann. XLI, 509-538 (1893).

In den Leipziger Berichten von 1890, S. 312 hatte Hr. Lie den Satz ausgesprochen, dass jede transitive Gruppe, die durch solche continuirlichen Functionen dargestellt wird, die eine gewisse Anzahl von Differentiationen gestatten, mit einer durch analytische Functionen darstellbaren Gruppe ähnlich ist. Der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit ist, diesen Satz zu beweisen und die Ordnung der erforderlichen Differentiationen möglichst zu begrenzen.

Nach einem einleitenden Paragraphen, in dem der Verfasser die nötigen Sätze über die Existenz von Lösungen gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen und über die Differentiirbarkeit dieser Lösungen zusammenstellt, und zwar mit den Beweisen, betrachtet er in § 2 eine Gruppe:

$$x_i' = f_i(x_1, \dots, x_n;\, u_1, \dots, u_r) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

von reellen Transformationen. Die Gruppeneigenschaft kommt auf das Bestehen von Gleichungen von der Form:

$$f_i(f_1(x,u), \dots, f_n(x,u);\, v_1, \dots, v_r)$$

$$= f_i(x_1, \dots, x_n;\, \varphi_1(u,v), \dots, \varphi_r(u,v))$$

hinaus, und es wird nun vorausgesetzt, dass die $f_i(x,u)$ und die $\varphi_k(u,v)$ innerhalb gewisser Bereiche eindeutig, stetig und endlich sind, und dass die $f_i(x,u)$ erste und zweite Differentialquotienten nach u_1, ..., u_r besitzen, die von derselben Beschaffenheit sind. Endlich wird noch vorausgesetzt, dass die Gruppe die identische Transformation enthält, und dass die Ausdrücke:

$$\left[\frac{\partial f_i(x,u)}{\partial u_k}\right]_{u=u^0},$$

wo u_1^0, ..., u_r^0 die Parameter dieser Transformation sind, nicht sämtlich verschwinden und überdies stetig und endlich sind und eben solche Differentialquotienten nach den x besitzen. Unter diesen Voraussetzungen gelingt es, nachzuweisen, dass die Gruppe den Lie'schen "grundlegenden Differentialgleichungen" genügt, und dass für diese Differentialgleichungen die von Hrn. Lie aufgestellten Sätze gelten. In § 3 wird nunmehr, ohne Benutzung der Jacobi'schen Identität, gezeigt, dass die Constanten c_{iks}, die in den grundlegenden Differentialgleichungen auftreten, auch jetzt die bekannten Lie'schen Relationen:

$$\sum_{\nu}^{1,\dots,r} (c_{ik\nu}c_{\nu js} + c_{kj\nu}c_{\nu is} + c_{ji\nu}c_{\nu ks}) = 0 \qquad (i,k,j,s = 1, \dots, r)$$

erfüllen, und dass die Parametergruppe der vorgelegten Gruppe auf eine solche Form (die kanonische Form) gebracht werden kann, dass ihre Gleichungen nur analytische Functionen enthalten. In § 4 wird bewiesen, dass genau dasselbe auch bei der ursprünglichen Gruppe ausgeführt werden kann, sobald diese transitiv ist. Am Schlusse des § 4 berichtigt der Verfasser noch ein Versehen in einer seiner früheren Arbeiten und leitet endlich aus seinen Sätzen den Lie'schen Satz her, dass die Frage, ob zwei transitive Gruppen mit gegebenen infinitesimalen Transformationen ähnlich sind oder nicht, durch algebraische Operationen beantwortet werden kann.

Reviewer: Engel, Prof. (Leipzig)

Full Text: DOI EuDML